CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA22A

Guia Control 2, Derivación, 26 de Abril 2007

P.1. Sea $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, tal que existen derivadas parciales de primer orden y son contínuas. Sean $g : U \to [a,b]$ y $h : U \to [a,b]$ de clase $\mathcal{C}^1(U)$.
Se definen:

$$\phi(x) = \int_a^{g(x)} f(x,t)dt \qquad \psi(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)dt$$

Calcule:

(a) $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)$ con $i = 1, ..., n$ Justifique.
(b) $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)$ con $i = 1, ..., n$ Justifique.
(c) Considere $\gamma(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha^2} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$. Calcule γ' para $\alpha \neq 0$

P.2.

- Considere $z = x^3 - 3x^2y - 2y^3$. Pruebe que: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z$
- Considere $z = \frac{x-y}{x+y}$. Pruebe que: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
- Considere $z = \frac{xy}{x+y}$. Pruebe que: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$

P.3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine aquellos $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ para los cuales existe $Df((0,0);\vec{v})$ y estudie la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

P.4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine aquellas direcciones para las cuales existe la derivada direccional de f en $(0,0)$.

P.5. Se llama Lapaciano de una función $f(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^2$ a:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Expresar Δf en coordenadas polares, esto es, en función de las derivadas (primeras y segundas) de f respecto a ρ y θ, siendo $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$.

P.6. Sea una función bilineal contínua (no necesariamente simétrica) $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Sea $h(x) = b(x, x)$. Calcule el diferencial de h en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y demuestre que h es de clase $\mathcal{C}^1$.
  Hint: recuerde que una función bilineal es contínua ssi existe una constante k tal que $||b(x, y)|| \leq k\, ||x||\, ||y||$
- Calcule ahora el diferencial de la función bilineal b en un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
  Hint: Calcule $Db(a, b)[\alpha, \beta]$ a partir de la definción de diferencial, usando en el espacio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ la norma $||(x, y)||_2 = (||x||^2 + ||y||^2)^{1/2}$
- Considere ahora la función $b(x, y) = xAy^T$. Con A matriz de $\mathcal{M}_{n,n}$. Calcule el diferencial de b en un punto (a, a) y verifique que si A es simétrica se tendrá que: $Db(a, a)(\alpha, \alpha) = 2\alpha A a^T$. Calcule ahora el diferencial de $h(x) = b(x, x)$ en $a \in \mathbb{R}^n$, como queda cuando A es simétrica?

P.7. Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en $(0, 0)$ y tal que $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 1$. Calcular las derivadas de f en $(0, 0)$ segun los siguientes vectores:

- $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ con $\theta = \pi/6$
- El unitario que dé máxima derivada
- El unitario que dé derivada nula, hallando dicho vector.

P.8. Considere:

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$$
$$\vec{x} \to f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||_2^2}$$

Calcule el Jacobiano de f.

P.9. Sea ahora:

$$f_x : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \to f_x(t) = (t^2 + 1/t)\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||_2^2}$$

Calcule $Df_x(t)(s)$. (Note que el x está fijo)

P.10. Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones $(x, y) \to z$ definidas como sigue:

(a) $z = y\sin(xy)$
(b) $z = (\exp^{2x+y} - x^2)^{1/2}$
(c) $z = x/(x^2 + y^2)$
(d) $z^3 - y^2 z + x^2 y + y^3 = 2$

P.11. Hallar la diferencial segunda de:

$$z = xy + arctg(xy)$$

P.12. Transformar la expresión (en que se supone que $(x, y) \to z(x, y)$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$)

$$E = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{2}{x}(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y})$$

Cuano se toman como nuevas variables:

$$u = x + y \qquad v = y/x$$

P.13. Sea A una matriz cualquiera de $m \times n$ y$b \in \mathbb{R}^n$. Se define $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por:

$$f(\vec{x}) = ||A\vec{x} - b||_2^2$$

Muestre que f es diferenciable y calcule $\nabla f(x)$