

CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA22A

CLASE AUXILIAR, JUEVES 19 DE ABRIL 2007

Problema 1. Espacio vectorial de las Matrices.

Sean $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n)$ y $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_m)$ Con dos normas cualesquiera (recuerde que en dimensión finita todas las normas son equivalentes). Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal.

i. Pruebe que $\forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m); \exists C \leq 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|L(x)\|_m \leq C \|x\|_n$

Concluya con esto que todas las funciones lineales en dimensión finita son continuas.

ii. Sea

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$L \rightarrow \inf \mathcal{C}$$

Con $\mathcal{C} = \{C \geq 0 : \|L(x)\|_m \leq C \|x\|_n \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

Demuestre que $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ es un espacio vectorial normado.

Puedes serle útil probar que $\mathcal{C}$ es cerrado y que por lo tanto $\forall x \in \mathbb{R}^n \|L(x)\|_m \leq \|L\|_{\mathcal{L}} \|x\|_n$

iii. Sea A la matriz representante de L con respecto a la base canónica y sean:

$$\|\cdot\|_n = \|\cdot\|_2 \quad y \quad \|\cdot\|_m = \|\cdot\|_2$$

Demostrar que $\|L\|_{\mathcal{L}} = \sqrt{\lambda_n}$, en que λ_n es el máximo valor propio de $A^T A$

Aplicaciones del teorema del Punto fijo de Banach. Sean E y F dos espacios de Banach. Una función $f : E \rightarrow F$ se dice contractante si:

$$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E$$

Donde $0 < K < 1$.

Teorema del Punto Fijo de Banach

Sea $\mathcal{C} \subset E$ cerrado y $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ contractante. Entonces T tiene un único punto fijo. (ie. $T(x) = x$)

La idea es usar este teorema para resolver sistemas de ecuaciones de la forma

$$Ax = b$$

siendo A una matriz invertible. La pregunta obvia es, por qué nos interesa buscar otra forma de invertir matrices si ya sabemos pivotar. Es muy útil saber encontrar soluciones con métodos iterativos cuando las matrices son grandes, debido a que el proceso de pivoteo requiere gran cantidad de cálculos. O también cuando se conoce un valor cercano de la solución se puede iterar hasta converger a esta. Un método iterativo permita construir una sucesión x_n de vectores que se aproximan a la solución exacta $x = A^{-1}b$ del sistema en el sentido:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Los metodos iterativos más usados son los que construyen la solución de la forma:

$$x_{n+1} = Bx_n + c, \quad B \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad c \in \mathbb{R}^n$$

a partir de x_0 arbitrario. Se usan métodos iterativos para encontrarle un punto fijo a la función $f(x) = Bx + c$, el cuál ser solución del sistema.

Definición 1. Un método se dice convergente, si para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = A^{-1}b$$

Definición 2. Un método se dice convergente para el sistema $Ax = b$ si y solo si verifica:

- El método es consistente con el sistema
- $\|B\| < 1$

Teorema 1. Todo método convergente es de la forma $x_{n+1} = M^{-1}Nx^m M^{-1}b$ con $A = M - N$.

Con esto los métodos se suelen presentar de la forma $Mx_{n+1} = Nx_n + b$. Para estudiar las estabilidad, hay que analizar la influencia de perturbaciones. Así que supongamos que se ha cometido un error, es decir, en vez de:

$$x_{n+1} = Bx_n + c$$

se calcula

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= By_n + c + \rho_{n+1} \\ y_0 - x_0 &= \rho_0 \\ y_n - x_n &= B^n \rho_0 + \sum_{j=1}^n B^{n-j} \rho_j \end{aligned}$$

con lo cuál

$$\|x_n - y_n\| \leq \sum_{j=1}^n \|B\|^{n-j} \|\rho_j\| \leq \sup \|\rho_j\| \sum_{j=1}^n \|B\|^j \leq \sup \|\rho_j\| \sum_{j=1}^{\infty} \|B\|^j = \frac{1}{1 - \|B\|} \sup \|\rho_j\|$$

si $\|B\| < 1$.

Método de Jacobi. Consiste en descomponer la matriz A en $A = D - L - U$ donde D es la diagonal principal de A , L es una matriz triangular inferior estricta, cuyos elementos no nulos coinciden con los de A , y U es una matriz triangular superior estricta cuyos elementos no nulos coinciden con los de A .

Por lo tanto el método de Jacobi considera $M = D$ y $N = L - U$. Por lo tanto, la matriz de iteración J será:

$$J = M^{-1}N = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & 0 & \frac{-a_{n-1,n}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

El método de Jacobi se puede escribir por componente como:

$$x_i^n = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^n + b_i \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$