Universidad de Chile
Depto. de Ingeniería Matemática

Clase Auxiliar

MA22A – Cálculo en Varias Variables – Semestre Verano 2006

Profesor: Marcelo Leseigneur P. **Fecha:**
Auxiliares: Renzo Lüttges C.– José Miguel Vera R. - Thomas Capelle N. 2 de Abril de 2007

Problema 1:

Analizar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ de las siguientes funciones en función de $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2|y|^\alpha}{x^6+y^2}$

2. $f(x,y) = \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2-xy}$

Anexo: [Cambio a coordenadas polares]:

Sea $A = (0,\infty)\times(0,2\pi)$ y sea $g: A\to\mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\, sen\,\theta)$. (g es una biyección continua de A sobre $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$). Se tiene:

1. $g\{(\rho,\theta)\in A:\ 0<\rho<r\ ,\ 0<\theta<2\pi\} = B((0,0),r)$

2. Dada $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F = f\circ g$ es tal que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = a$ si y sólo si, dado $\epsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que si $0<\rho<\delta$ entonces $|F(\rho,\theta)-a|\leqslant\epsilon$, para todo $\theta\in[0,2\pi]$

Problema 2:

Determinar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, de existir el límite, calcularlo. Utilice Coordenadas Polares.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y+x\, sen\, y}{\sqrt{x^2+y^2-xy}}$

2. $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

Solución:

Problema 1:

Primero escogemos nuestro candidato a límite, en este caso es cero, pues estamos tomando $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$. Luego vemos la definición para demostrar el límite.

$$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0\ ;\ 0<\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta \Rightarrow \|f(\vec{x})-L\|<\epsilon$$

Luego la idea es acotar $\|f(\vec{x})-L\|$ por $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|$, puesto que esto es menor que delta, el cual siempre podemos escoger menor que epsilon. También es útil acotar por una función continua e invertible de $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|$ tal que $f(0)=0$ (¿porqué?). En fin, al acotar superiormente el término $\|f(\vec{x})-L\|$ por cualquier expresión que tienda a cero, habremos demostrado que el límite de *f* es *L*.

En este ejemplo usaremos las siguientes cotas, inspiradas en el término en el denominador: $|x|\leqslant(x^6+y^2)^{\frac{1}{6}}$ $\quad |y|\leqslant(x^6+y^2)^{\frac{1}{2}}$. Cotas de este tipo son válidas siempre que los exponentes sean pares.

Entonces tendremos:

$$\left|\frac{x^2|y|^\alpha}{x^6+y^2}\right|\leqslant\frac{(x^6+y^2)^{\frac{2}{6}}(x^6+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{(x^6+y^2)^1}=(x^6+y^2)^{\frac{3\alpha-4}{6}}$$ Donde la ultima expresión tiende a cero para $\alpha>\frac{4}{3}$. luego para esos valores de alfa, el límite de la función será cero. ¿qué pasa para los demás valores? Lo que hemos hecho hasta ahora no nos asegura nada, sin embargo la intuición es que no hay límite.
La forma más usual de demostrar esto es encontrando un camino por el cual la función no tenga límite o este dependa de un parámetro.

Por ejemplo, veamos que para $\alpha=\frac{4}{3}$ podemos tomar el camino $y=m\,x^3$:

$f(x,mx^3)=\frac{|m|^{4/3}}{1+m^2}$, el cual depende de alpha... y por lo tanto no hay límite. Tomando este mismo camino para $\alpha<\frac{4}{3}$, obtenemos:

$f(x,mx^3)=\frac{1}{|x|^{4-3\alpha}}\frac{|m|^\alpha}{1+m^2}$ lo cual diverge cuando x tiende a cero.

Ejemplos de transformación a coordenadas polares:

Las coordenadas polares nos permiten calcular los límites de la forma $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ utilizando sólo una variable, a saber el radio. $\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta)$. La transformación que usamos es $\begin{matrix} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\, sen\,\theta \end{matrix}$

Un par de ejemplos sencillos:

$$f(x,y)=\frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{sen(\rho^2)}{\rho^2} \quad \text{con lo cual} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\frac{sen(\rho^2)}{\rho^2}=1 \quad .$$

$f(x,y)=\frac{y}{x}\cos(x^2+y^2)=tg(\theta)\cos(\rho^2)\Rightarrow \lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta)=tg(\theta)$. En este caso el límite depende del ángulo de acercamiento a *(0,0)* .

Problema 2:

$$f(x,y)=\frac{x^2y+x\,sen\,y}{\sqrt{x^2+y^2-xy}}=\frac{\rho^3\cos^2(\theta)\,sen(\theta)+\rho\cos(\theta)\,sen(\rho\cos(\theta))}{\sqrt{\rho^2-\rho^2\cos(\theta)\,sen(\theta)}} \quad .$$

Notemos que $T(\theta)=1-\cos(\theta)\,sen(\theta)$ es una función no nula para cualquier ángulo, luego la expresión obtenida para *f* no se indefine. Tomando $\lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta)$, obtenemos entonces el valor cero.