CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA22A

Clase Auxiliar, Martes 3 de Abril 2007

Problema 1. Caracterizacíon de Conjuntos Abiertos y cerrados.
Sea $(X, ||\cdot||)$, espacio vectorial normado. Se definió en clases $Int(A)$ y $Adh(A)$, la idea es caracterizar estos conjuntos de maneras alternativas.
Veamos que:

$$\begin{aligned} Int(A) &= \{x \in A \ : \ \exists \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \subset A\} \\ &= \text{Abierto mas grande contenido en A} \\ &= \bigcup \{V \ : \ V \ abierto, \ V \ \subset A\} \\ Adh(A) &= \{x \in X \ : \ \forall \epsilon > 0, \exists y \in A, ||x-y|| < \epsilon\} \\ &= \text{Cerrado mas pequeño que contiene a A} \\ &= \bigcap \{C \ : \ C \ cerrado, \ A \ \subset C\} \end{aligned}$$

Se suele notar: $Int(A)=\mathring{A}$, $Adh(A) = \bar{A}$
Probemos con esto las siguientes propiedades:
Sean $A, B \subset X$ cualquiera:

i. $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$
ii. $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$, dé un ejemplo donde no se tiene la igualdad.
iii. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
iv. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, dé un ejemplo donde no se tiene la igualdad.
v. $A \subset B \ \Rightarrow \ Int(A) \subset Int(B)$ y $\bar{A} \subset \bar{B}$
vi. $Int(\overline{A^c}) = (\bar{A})^c$
vii. $(\overline{A^c}) = Int(A)^c$

Problema 2. Sea (X, d) un espacio métrico. Definamos el diámetro de un conjunto:

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

Pruebe que:

(a) i. Si $A \subset B$ entonces $\delta(A) \leq \delta(B)$
ii. Si $\delta(A) = 0$ entonces $A = \{x\}$ (un elemento)
iii. $\delta(A) = \delta(\overline{A})$

(b) Considere la distancia de un punto x a un conjunto A como: $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$ y pruebe que si $d(x, A) = 0$ entonces $x \in \overline{A}$

Problema 3. Sea (X, d) espacio métrico donde d satisface la siguiente desigualdad:

$$d(x,z) \leq \max \{d(x,y), d(y,z)\} \tag{1}$$

i. Probar que si $d(x,y) \neq d(y,z)$ entonces (1) se transforma en igualdad.
ii. Pruebe que toda bola abierta es a la vez un abierto y un cerrado, y que para cada $y \in B(x,r) : B(x,r) = B(y,r)$
iii. Pruebe que toda bola cerrada es a la vez un abierto y un cerrado, y que para cada $y \in \overline{B(x,r)} : \overline{B(x,r)} = \overline{B(y,r)}$
iv. Pruebe que si dos bolas tienen un punto en común, entonces una de ellas contiene a la otra.