Universidad de Chile
Depto. de Ingeniería Matemática

Guia de Problemas - Topología

MA22A – Cálculo en Varias Variables

Profesor: Marcelo Leseigneur P. **Fecha:**
Auxiliares: Renzo Lüttges – José Miguel Vera – Thomas Capelle 27 de Marzo de 2007

Problema 1: Sea C el conjunto de todas las funciones reales continuas en [0,1]. Para cada $f, g \in C$ se definen:

$$\rho(f,g) = \operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)| \quad , \quad \sigma(f,g) = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2 dt\right) \quad , \quad \Gamma(f,g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|\, dt$$

a) Suponga que $f \neq g$. Luego $\exists\ t_0$ *tal que* $f(t_0) \neq g(t_0)$. Pruebe que existe un intervalo $I \subseteq [0,1]$ *tal que* $|f(t)-g(t)| \geqslant \frac{1}{2}|f(t_0)-g(t_0)|$ para todo $t \in I$. Deduzca que $\sigma(f,g) > 0$ *y* $\Gamma(f,g) > 0$.

b) Pruebe que $\rho, \sigma,$ *y* Γ son métricas en C.

Indicación: Puede serle útil emplear la desigualdad de Schwartz para integrales:

$$\left(\int_0^1 \phi(t)\psi(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 \phi^2(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_0^1 \psi^2(t)\,dt\right)$$

c) Pruebe que para todo $f, g \in C$ se tiene:

$$\rho(f,g) \geqslant \sigma(f,g) \geqslant \Gamma(f,g)$$

d) Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1-nt & si \quad 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 0 & si \quad \frac{1}{n} < t \le 1 \end{cases}$$

Y sea $f(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$.

i. Pruebe que $f_n \to f$ *si* $n \to \infty$ *en* (C, ρ)
ii. ¿Converge f_n *a* f *en* (C, Γ) ? Justifique.

1. Pruebe que f_n no converge a f en (C, ρ)

Pregunta 2:

a) Considere el conjunto $C^1[0,1]$ de todas las funciones reales definidas en [0,1] con primera derivada continua en [0,1]. Muestre que:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 (f(t)g(t)+f'(t)g'(t))\,dt$$ define un producto interno en $C^1[0,1]$.

b) En el espacio $C[1,e]$ se define $\langle f,g\rangle = \int_1^e \ln(t)f(t)g(t)dt$

1. Demostrar que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno
2. Calcule $\|f\|$ inducida por $\langle \cdot,\cdot\rangle$ si $f(x)=\sqrt{x}$.
3. Hallar un polinomio de 1º grado $g(x)=ax+b$ que sea ortogonal a la función $f(x)=1$.

Pregunta 3:

a) Probar que en todo espacio normado $(X,\|\cdot\|)$ se tiene que:

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2+\frac{1}{2}\|y\|^2$$

b) Probar que para dos vectores x e y cualquiera se verifica:

$$\|x\| \leqslant Max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}$$

Pregunta 4:

Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n. En E se define la función $N:E\rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$N(p)=\int_0^1 |p'(t)|dt+|p(0)|$$

1. Demuestre que N es una norma en E
2. Encuentre $L\in\mathbb{R}$ tal que $\forall p\in E \quad N(p)\leqslant L\cdot Max\{|a_i|\}$ con $i=0..n$ y $p(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$.
3. Sea $M=\{\lambda p \,/\, \lambda\in\mathbb{R}\}$ donde $p(t)=1+t+...+t^n$. Determine $M\cap B_N(0,1)$.

Problema 5:

Sea $E=[0,\infty)$. Se define una aplicación de $E\times E$ en $\mathbb{R}$ por:

$$d(x,y)=\left|\frac{x}{x+1}-\frac{y}{y+1}\right|$$

1. Muestre que d es una métrica en E
2. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión en E definida por $x_n=n$
   ¿Es $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en $(E,|\cdot|)$?
   ¿Es $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en (E,d) ?

Problema 6:

Sea $C[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\ /\ f \text{ continua}\}$. Se definen:

$$d_\infty(f,g)=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)| \quad \text{y} \quad d_1(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx \quad .$$

1. Muestre que d_∞ y d_1 son métricas,
2. Muestre que $(C[0,1],d_\infty)$ es completo.
3. Sea la siguiente sucesión de funciones.

$$f_n(x)=\begin{cases} -1 & si\, x\in[0\ ,\ 1/2-1/n) \\ n(x-1/2) & si\, x\in[1/2-1/n\ ,\ 1/2+1/n) \\ 1 & si\, x\in[1/2+1/n\ ,\ 1) \end{cases}$$

¿Es $\{f_n\}$ de Cauchy en $(C[0,1],d_1)$? ¿ Es $(C[0,1],d_1)$ completo ?

Problema 7:

Indique el gráfico que corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}^3$.

1. $z=x-y^2$
2. $z=x^2-y^2$
3. $1=x^2-y^2$
4. $z=(x-y)^2$
5. $z=\ln(|xy|+1)$.

Pregunta 8:

a) Sean f y g las siguientes funciones reales de dos variables:

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^2}{1-\cos(x)+y} \quad , \quad g(x,y)=\frac{x^3-y^2}{1-\cos(x)+|y|} \quad .$$

Analice la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$. En caso de existir alguno de los límites, calcule su valor.

b) Analice la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ de las siguientes funciones:

$$f(x,y)=\frac{x\,y^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^3} \quad , \quad g(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x^2+y^3} \quad , \quad h(x,y)=\frac{e^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right)}}{|y|+e^{\frac{1}{|x|}}} \quad .$$