Pauta ejercicio 1.

P1. Sea $E = (0, \infty)$. Se Define para todo $(x, y) \subset E \times E$:

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

(i) Mostrar que $d(x, y)$ es una métrica en E .

(ii) Considérese la sucesión $(u_n)_{n \geq 1}$ definida por $u_n = n$. Mostrar que es sucesión de Cauchy.

(iii) Mostrar que la sucesión anterior no converge en (E, d) . Comente y Concluya.

Solución

(i) a) es directo que $0 \leq d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \infty$

$$b) d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = d(y, x)$$

$$c) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$$

como $(x, y) \neq (0, 0)$ se concluye $x = y$

$$d) d(x, z) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| \\ = d(x, y) + d(y, z)$$

(ii) Sea $\varepsilon > 0$. Notar que la sucesión $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}$ converge a 0 en el

espacio $(\mathbb{R}, | \cdot |)$. es, en particular, una sucesión de cauchy en ese espacio lo que implica:

$$\exists N \subset \mathbb{N} / \forall p \geq q \geq N, \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| \leq \varepsilon$$

$$\exists N \subset \mathbb{N} / \forall p \geq q \geq N, d(u_p - u_q) \leq \varepsilon$$

lo que es una sucesión de Cauchy en (E, d) .

(iii) Por Contradicción. Suponer que la sucesión $(u_n)_{n \geq 1}$ tiende a l :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \subset \mathbb{N}; \forall n \geq N, \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{l} \right| \leq \varepsilon$$

lo que equivale a que la sucesión $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}$ tiende a $\frac{1}{l} > 0$. Contradicción.

se muestra una sucesión de Cauchy que no converge en (E, d) .

P2. Probar que, en todo espacio Normado $(E, \| \cdot \|)$,

$$\left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

para cualquiera $x, y \in E$.

Solución:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\|^2 &\leq \frac{1}{4}(\|x\| + \|y\|)^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|}{4} \\ &\leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2}{4} = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 \end{aligned}$$