## CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA22A

Solución P3 Clase Auxiliar Extra, Mie 21 de Marzo 2007

**Problema 3.** La idea de este problema es caracterizar los espacios de Banach por medio de las series absolutamente convergentes. Probaremos lo siguiente: X es espacio de Banach $\Leftrightarrow$ Para toda sucesión $(x_i)$ en X tal que $\sum ||x_i||$ converge, entonces $\sum x_i$ también converge. Para ello prosiga de la siguiente manera:

i. Suponga que $X$ es espacio de Banach y que $\sum ||x_i||$ converge.
   Considere $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ y pruebe que $S_n$ es de Cauchy.

ii. Pruebe que para cualquier sucesión de Cauchy en un e.v.n $X$ (no nec. Banach), podemos extraer una subsucesión $(x_{\alpha(i)})$ que cumple la siguiente propiedad:

$$||x_{\alpha(i)} - x_{\alpha(i+1)}|| \leq \frac{1}{2^i}, \forall i \in \mathbb{N} \tag{1}$$

iii. Utilizando la propiedad anterior, concluya. (Hint: Recuerde la sumas geométricas y telescópicas)

**Solución.** Sea $(x_i)$ sucesión de $X$ cualquiera.

i. Supongamos que $X$ es Banach y que $\sum ||x_i||$ converge. Queremos probar que $\sum x_i$ también converge. Para esto nos basta ver que $S_n$ es de Cauchy, ya que supusimos que $X$ es Banach, y por lo tanto las sucesiones de Cauchy son convergentes.
   Veamos que $S_n$ es de cauchy:

$$||S_m - S_n|| = ||\sum_{i=0}^{m} x_i - \sum_{i=0}^{n} x_i|| = ||\sum_{i=n+1}^{m} x_i||$$

$$\leq ||\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i|| \longrightarrow 0$$

$$n \longrightarrow \infty$$

   Ya que la serie era convergente, su cola se tiene que ir a cero. Con esto se tiene que $S_n$ es de Cauchy y por lo tanto convergente.

ii. Sea ahora $(x_i)$ una sucesión de Cauchy en $X$. Vamos a construir un método para extraer la sub-Sucesión que necesitamos:
   Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N_1$

$$||x_n - x_{n+1}|| \leq \epsilon$$

   Notese que la definición de Cauchy es equivalente a esto.
   Ahora como es para todo $\epsilon$, consideremos $\epsilon = 1/2$, y tenemos con esto que para todo $n \geq N_1$:

$$||x_n - x_{n+1}|| \leq 1/2$$

Y agregamos $x_{N_1}$ a nuestra subsucesión.
Ahora elegimos $\epsilon = 1/4$, y esto nos genera un nuevo $N_2$, tal que $\forall n \geq N_2$

$$||x_n - x_{n+1}|| \leq 1/4$$

Luego agregamos como segundo termino a nuestra subsuc. $x_{N_2}$ Y as vamos agregando terminos, hasta que tenemos una subsucesión $\{x_{N_1}, x_{N_2}, ..., x_{N_j}, ...\}$
Verificar que la distancia entre dos términos consecutivos cumple la propiedad (1).

iii. Como ahora queremos probar ($\Leftarrow$), suponemos que para toda sucesión $(x_i)$ en X tal que $\sum ||x_i||$ converge, entonces $\sum x_i$ también converge.
Usando lo anterior, escogemos tal sub-sucesión, que denotaré igual $(x_i)$ y basta sumar a ambos lados:

$$\sum_{i=0}^{\infty} ||x_n - x_{n+1}|| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

Vale 2, ya que es una geométrica. Adems por hipótesis el lado izquierdo converge sin norma.

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} x_n - x_{n+1} = l$$

Pero si consideramos la suma hasta un $m$ fijo, obtenemos una telescópica:

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{m} x_n - x_{n+1} = x_0 - x_m$$

$$\Rightarrow \lim_{m \to \infty} x_m = x_0 - l$$

Con esto probamos que una suc. de Cauchy tiene una sub. suc convergente, por lo tanto, toda la sucesión converge al mismo límite. Así $X$ es Banach.