CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA222A

Clase Auxiliar Extra, Mie 21 de Marzo 2007

Problema 1. Consideremos $V = \left\{ f \in C^1([0,1], \mathbb{R}) | f'(1/2) = 0 \right\}$ el espacio de las funciones con derivada contínua de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ y la norma:

$$||f|| = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

Pruebe que $(V, ||\cdot||)$ es e.v.n.

Problema 2. Consideremos $E = \left\{ f \in C^0([0,1], \mathbb{R}) \right\}$ el espacio de las funciones contínuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ y la norma:

$$||f||_0 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

Pruebe que $||\cdot||_0$ es norma.

Problema 3. La idea de este problema es caracterizar los espacios de Banach por medio de las series absolutamente convergentes. Probaremos lo siguiente: X es espacio de Banach $\Leftrightarrow$ Para toda sucesión (x_i) en X tal que $\sum ||x_i||$ converge, entonces $\sum x_i$ también converge. Para ello prosiga de la siguiente manera:

i. Suponga que X es espacio de Banach y que $\sum ||x_i||$ converge.
Considere $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ y pruebe que S_n es de Cauchy.

ii. Pruebe que para cualquier sucesión de Cauchy en un e.v.n X (no nec. Banach), podemos extraer una subsucesión $(x_{\alpha(i)})$ que cumple la siguiente propiedad:

$$||x_{\alpha(i)} - x_{\alpha(i+1)}|| \leq \frac{1}{2^i}, \forall i \in \mathbb{N} \tag{1}$$

iii. Utilizando la propiedad anterior, concluya. (Hint: Recuerde la sumas geométricas y telescópicas)