Auxiliar 15/03/07

Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathfrak{R}^N$, $1 < p < \infty$, $q \in \mathfrak{R}$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Probar las siguientes desigualdades.

(i) Desigualdad de Holder

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}$$

(ii) Desigualdad de Minkovski

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}$$

Soluciones: vistas en clases. Consideraciones:

- En Holder no hay que tratar de analizar la función phi. Solo hay que darse cuenta que posee un máximo en 1, lo que permite llegar a la desigualdad de Young. Su única utilidad es que permite desarrollar expresiones que demuestran la desigualdad. El verdadero argumento importante es el de las normas finales, donde queda $1/p + 1/q = 1$.
- Minkovski se demuestra de la siguiente manera (por si alguien se perdió):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p &= \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{p-1} |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^n \left(|a_k| |a_k + b_k|^{p-1} + |b_k| |a_k + b_k|^{p-1} \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

Como $q(p-1) = p$, multiplicando la desigualdad anterior por :

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{-1/q}$$

Se obtiene Minkovski.

- Aplicación de Holder:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i z_i \right)^4 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right)^4 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n z_i^4 \right)^4$$

demostración

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i z_i \right| &\leq \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i z_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n z_i^2 x_i^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \dots (\text{aplicar Holder y continuar como en clases}) \end{aligned}$$

Este es el ejercicio original. La primera desigualdad es triangular. El hecho de partir con módulo es sólo para aplicar Holder, y no afecta los resultados finales pues se eleva un modulo a un numero par (4).