Ma22A

PAUTA CONTROL III

Pregunta Nº 3

Felipe Maldonado Caro[1]

11 de junio de 2007

[1]Estudiante de ingeniería, Universidad de Chile. Contacto: femaldon@ing.uchile.cl

Pregunta 3:

(a) Demuestre que la funcion $f(x,y)=\dfrac{x-y}{|x-y|}$ es integrable sobre
R $=\{(x,y)\|0<x<1,0<y<1\}$ y calcule la integral

$$\int_R f=\int_0^1\int_0^1\frac{x-y}{|x-y|}dxdy$$

Sol:

Integrabilidad: existen diferentes maneras de probar esto, expondré las 2 soluciones mas obvias , pero seré tolerante con todo tipo(correcto) de soluciones (**edicion post-correccion:** al revisar las soluciones me encontre con una hermosa solucion con sumas de Riemmann, que estaba muy bien explicada)

método 1:
Se sabe que por Teorema, si f es continua (a trazos) sobre un dominio R (un rectángulo) se tiene que f es integrable
$En\ efecto$ R es un rectángulo pues $R=[0,1]X[0,1]$. asi que lo único que nos queda analizar es si f es continua, para ello veamos como está definida:

$$f=\begin{cases}1 & \text{si } x>y\\ -1 & \text{si } x<y\\ indefinida & \text{si x=y}\end{cases}$$

vemos que para los dos primeros casos no hay problemas pues tanto **1** como **-1**, son funciones continuas, luego sólo nos molesta el tercer caso, pero se puede comprobar trivialmente que es una discontinuidad de salto finito ($i.e$ no diverge, basta calcular los limites $\lim_{x\to y^-}\frac{x-y}{|x-y|}$ y $\lim_{x\to y^+}\frac{x-y}{|x-y|}$ y corroborar que son respectivamente iguales a -1 y 1), por lo tanto tenemos, lo queriamos, es decir, que f es continua a trazos, finalmente f es integrable.

método 2:
Se sabe que f es integrable ssi $|\displaystyle\int f|<\infty$, pero además sabemos por propiedad de la integral (analogía con la desigualdad triangular) que:$|\displaystyle\int f|<\int|f|$
Veamos entonces que es $\displaystyle\int|f|=?$

$$\int|f|=\int_R\left|\frac{x-y}{|x-y|}\right|dxdy=\int_R\frac{|x-y|}{|x-y|}dxdy=\int_0^1\int_0^1 1dxdy=1<\infty$$

$\Rightarrow f$ es integrable

(1.5 ptos por cualquier método correcto)

Cálculo de la Integral

Notar que el conjunto R es un Jordan-Medible, entonces $\displaystyle\int_{x=y}\equiv 0$

$$\Rightarrow\int_R=\int_{R_1}+\int_{R_2}$$

con R_1=$\{(x,y)|x>y\}$ y R_2=$\{(x,y)|x<y\}$

notamos que para R_1 $0 < x < 1 \wedge 0 < y < x$
y para R_2 $0 < x < 1 \wedge x < y < 1$

$$\Rightarrow \int_R f = \int_0^1 \int_0^x \frac{x-y}{x-y} dydx + \int_0^1 \int_x^1 \frac{x-y}{-(x-y)} dydx$$
$$= \int_0^1 \int_0^x 1dydx + \int_0^1 \int_x^1 -1dydx$$
$$= \int_0^1 y \mid_0^x dx + \int_0^1 -y \mid_x^1 dx$$
$$= \int_0^1 xdx + \int_0^1 -(1-x)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \mid_0^1 + (\frac{x^2}{2} - x) \mid_0^1$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \ \square$$

Por el calculo de las 2 integrales con los límites **correctos** de integración 1 pto, por sumarlos 0,5 ptos(se que esto suena tonto, pero hay personas que dijeron que la integral final tomaba 2 valores, segun donde estuviera y eso esta incorrecto)

b) Encuentre el volumen de la región
$D = \{(x, y, z)|0 \leqslant z \leqslant (x + 2y - 1)^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, (x + 2y - 1) \leqslant 0\}$

$\boxed{\text{Sol:}}$

Sabemos que Vol(D)=$\int_D 1$
Sabemos además que x+2y-1 $\leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1 - 2y$, pero además $x \geqslant 0 \Rightarrow 1 - 2y$ debe ser $\geqslant 0$, y esto solo se tiene si $y \leqslant \frac{1}{2}$, se concluye entonces que los límites de integración deben ser los siguientes:
$0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$
$0 \leqslant x \leqslant 1 - 2y$
$0 \leqslant z \leqslant (x + 2y - 1)^2$ (0.5 pts)

Previamente haré una acotación que simplifica enormemente el cálculo:
Sea P(x,y,z), de la forma $(ax + by + cz + d)^n$, con a,b,c,d ctes reales y $n \in \mathbb{N}$, es claro que al desarrollar el polinomio nosotros en teoria sabriamos calcular todas las integrales con respecto a cualquiera de sus variables, sin embargo saldria (dependiendo de n) una expresión horriblemente larga, luego se hace necesaria buscar una manera mas eficiente de hacer el calculo, y para esto basta notar que $(ax + by + cz + d)^n = \frac{d}{dy}(\frac{(ax + by + cz + d)^{n+1}}{b \cdot (n+1)})$
, luego $\int_{y_0}^{y_1} P(x, y, z)dy = \frac{(ax + by + cz + d)^{n+1}}{b \cdot (n+1)} |_{y_0}^{y_1}$
(Esto lo acoto por que la gran mayoria de ustedes desarrollo una expresión similar con n=2

y luego integró y evaluó en los limites y les salió una espresión muy fea y todos se perdían al calcular de esa manera, llegando a resultados erróneos)

Ahora volvamos a nuestro problema:

Vol(D)

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{1-2y}\int_0^{(x+2y-1)^2} 1dzdxdy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{1-2y}(x+2y-1)^2dxdy \qquad (0.5\text{pts})$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{1-2y}\frac{d}{dx}(\frac{(x+2y-1)^3}{3})dxdy \qquad (0.5\text{pts})$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{(x+2y-1)^3}{3})|_0^{1-2y}dy \qquad (0.2\text{pts})$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{((1-2y)+2y-1)^3}{3})-\frac{(2y-1)^3}{3}dy$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(2y-1)^3}{3}dy \qquad (0.3\text{pts})$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dy}(\frac{(2y-1)^4}{3\cdot 2\cdot 4})dy \qquad (0.2\text{pts})$$

$$=-(\frac{(2y-1)^4}{3\cdot 2\cdot 4})|_0^{\frac{1}{2}} \qquad (0.2\text{pts})$$

$$=-\Big((\frac{(2(\frac{1}{2})-1)^4}{3\cdot 2\cdot 4})-(\frac{(2(0)-1)^4}{3\cdot 2\cdot 4})\Big) \qquad (0.2\text{pts})$$

$$=\frac{(-1)^4}{24} \qquad (0.1\text{pts})$$

$$=\frac{1}{24}\ \square \qquad (0.3\text{pts})$$

(Ésta es la distribución Standar de puntaje, varía de persona a persona, según la cantidad de pasos y los métodos usados, además para las personas que no llegaron al resultado correcto de la integral , pero intentaron dibujar la superficie, tendrán una puntuación distinta: 1pto por el gráfico correctome ha costado muchísimo dibujar la superficie en el computador, de hecho es la gran razón de la demora de mi pauta, si no logro hacerla hasta el dia del reclamo ese dia la llevo dibujada a mano para que la vean,se asume entonces que un dibujo no tan correcto no tenga todo el puntaje.Los otros 2pts se distribuyen uniformemente en el desarrollo de la integral)