Pauta P1 C3 MA22A-4 2007/01

Parte a)

Calculamos el gradiente.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{df}{dx_1} \\ \dfrac{df}{dx_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_1^2 \\ -2x_2 + 3x_2^2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \textbf{(0.5)}$$

Para encontrar puntos críticos imponemos que $\nabla f = 0$:

$$\Rightarrow -2x_1 + 3x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_1 = \frac{2}{3} \qquad \textbf{(0.1)}$$

Análogamente para x_2

$$\Rightarrow -2x_2 + 3x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \vee x_2 = \frac{2}{3} \qquad \textbf{(0.1)}$$

Con esto nos queda que existen 4 posibles puntos críticos, que son los siguientes:

$$(0,0); \left(0, \frac{2}{3}\right); \left(\frac{2}{3}, 0\right); \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

(0.2 c/u)

(Total a) 1.5)

Parte b)

Calculamos el Hessiano:

$$H = \begin{pmatrix} \nabla \dfrac{df}{dx_1}^T \\ \nabla \dfrac{df}{dx_2}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2 f}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 f}{dx_1 x_2} \\ \dfrac{d^2 f}{dx_2 x_1} & \dfrac{d^2 f}{dx_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6x_1 & 0 \\ 0 & -2 + 6x_2 \end{pmatrix}$$

(0.7)

Como H es diagonal los valores propios son los valores que se encuentran en la diagonal. Así solo resta evaluar en los puntos críticos:

$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0)$ es un máximo local.

$$H\left(0,\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\left(0,\frac{2}{3}\right)$$ es punto silla.

$$H\left(\frac{2}{3},0\right)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\frac{2}{3},0\right)$$ es punto silla.

$$H\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$ es un mínimo local.

(0.2 c/u)

(Total a) 1.5)

Parte c)

Veamos los puntos críticos de $f(x_1,x_2)$, tomando $\nabla f=0$, así:

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{df}{dx_1}\\ \frac{df}{dx_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(1-x_1)\\ 2(1-x_2)\end{pmatrix}=0\Rightarrow(1,1)$$ es punto critico.

Ahora bien, dicho punto no está al interior de D, luego, para encontrar el máximo sobre esa superficie usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange.

(1.0)

Tenemos $D=\{x_{1,}x_2 \mid 2\mathrm{x}_1+3x_2\le 1, x_1\ge 0, x_2\ge 0\}$

Definimos $g_1 = 2\mathrm{x}_1 + 3x_2 - 1$, $g_2=\mathrm{x}_1$, $g_3=\mathrm{x}_2$

Tomamos $L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=f(x_1,x_2)-\lambda_1 g_1-\lambda_2 g_2-\lambda_3 g_3$

Analicemos cada borde:

Caso 1 $\lambda_1=\lambda_3=0,\lambda_2\ne 0$

$$\frac{\partial L}{dx_1}=2(1-x_1)\Rightarrow(1,0)$$ es candidato pero está fuera de D.

Caso 2 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3\ne 0$ (Análogo al caso 1)

$$\frac{\partial L}{dx_2}=2(1-x_2)\Rightarrow(0,1)$$ que también esta fuera de D.

(0.5)

Caso 3 $\lambda_2=\lambda_3=0,\lambda_1\ne 0$

$$\frac{\partial L}{dx_1}=2(1-x_1)-2\lambda_1$$

$$\frac{\partial L}{dx_2}=2(1-x_2)-3\lambda_1$$

$$\frac{\partial L}{d\lambda_1}=2\mathrm{x}_1+3x_2-1$$

Resolviendo se obtiene:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{5}{13}, \frac{1}{13}\right) \qquad \lambda_1 = \frac{8}{13}$$

(0.5)

Finalmente agregamos los vértices de la superficie que son los puntos que satisfacen 2 las restricciones de D, los vértices son:

$$(x_1, x_2) = (0,0),\ (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, 0\right),\ (x_1, x_2) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$$

(0.5)

Evaluando se llega a que $(x_1, x_2) = \left(\frac{5}{13}, \frac{1}{13}\right)$ es el máximo sobre D.

(0.5)

(Total c) 3.0)