Guía Integración Ma22a-06 2006-1

Cálculo en Varias Variables

Prof. J. Dávila; Aux.: M. Bravo

1. Integración

1. Sea $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Probar que f es integrable y que $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f = \frac{1}{2}$.

2. Sea $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es iarracional,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es racional e } y \text{ irracional,} \\ 1/q, & \text{si } x \text{ es racional e } y = p/q \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$$

Probar que f es integrable y que $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f = 0$.

3. Dar un ejemplo de un conjunto acotado de medida 0 tal que si frontera no tenga medida 0.

4. Sean $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ integrable y $g = f$ salvo en un número finito de puntos. Probar que g es integrable y que $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} f = \int_{\mathcal{D}} g$.

5. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^N$ con $V(\mathcal{D}) > 0$. Suponga que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ es continua y que para toda $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_{\mathcal{D}} fg = 0.$$

Pruebe que $f \equiv 0$ en $\mathcal{D}$.

6. Probar que si $\mathcal{A}$ es un conjunto Jordan-medible y acotado con medida 0, entonces $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} 1_{\mathcal{A}} = 0$.

7. Probar que si f, g son integrables, también lo es fg.

8. Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ es no-negativa e $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} f = 0$, probar que $\{x \in \mathcal{D} \ : \ f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula. *Ind.*: Probar que los conjuntos $A_n = \{x \in \mathcal{D} \ : \ f(x) > \frac{1}{n}\}$ tienen medida nula.

9. Demostrar que en $\mathbb{R}^2$ el conjunto $\{(x, x^2) \ : \ x \geq 0\}$ es medible y tiene medida nula.

10. Sea $R = [0,1] \times [0,1]$ y $f : R \to \mathbb{R}$ una funcin acotada (es decir $|f(x,y)| \leq M \ \forall (x,y) \in R$) tal que

$$f_n(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } y > \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } y \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

es integrable para todo $n = 1, 2, \ldots$. Sea $I_n = \iint_R f_n$.

(a) Pruebe que $I = \lim_{n\to\infty} I_n$ existe.

(b) Pruebe que f es integrable y que $\iint_R f = I$.

Indicación. Demuestre que I_n es de Cauchy probando que si $n > k$ entonces $|I_n - I_k| \leq \frac{M}{k}$. Luego, considere la suma de Riemann $\sum_Q f(c_Q) a'rea(Q)$ con Q recorriendo la particin $\mathcal{P}_n(R)$ y $c_Q \in Q$. Divida la suma en dos partes: en aquellos Q's que tocan el eje x y el resto.

11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to R$ definida mediante $f(x,y) = y^2$ si $|x| \leq y \leq 1$, $f(x,y) = 0$ en otro caso. Justifique que f es integrable sobre el rectngulo $R = [-10, 10] \times [-10, 10]$ y calcule $\iint_R f(x,y)\, dx\, dy$.

2. Fubini y Cambio de Variables

12. Calcule las siguientes integrales iteradas

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{1}^{2} (x^2y^2 + xy^3)\, dy\, dx,\quad \int_0^1\int_0^z\int_0^y dx\, dy\, dz,\quad \int_0^{\pi/2}\int_{-y}^{y} \sin x\, dx\, dy.$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{1}\int_{0}^{y^2} (x^2 + y)\, dx\, dy,\quad \int_1^2\int_{x^2}^{x^3} x\, dy\, dx,\quad \int_0^2\int_1^3 (|x-2|\sin x)\, dx\, dy.$

c) $\displaystyle\int_1^2\int_1^x\int_1^{x+y-1} dz\, dy\, dx,\quad \int_1^2\int_0^1\int_x^y dz\, dx\, dy,\quad \int_{-1}^{1}\int_0^{|x|}\int_0^1 (x+y+z)\, dz\, dy\, dx.$

13. Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ con $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua. Definamos $F(y) \equiv \int_a^b f(x,y)\, dx$.

a) Pruebe la regla de Leibnitz:

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx.$$

Ind.: Note que $\displaystyle F(y) = \int_a^b \left\{ \int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,s)\, ds + f(x,c) \right\} dx$

b) Definamos ahora $\displaystyle G(x,y) \equiv \int_a^x f(t,y)\, dt$ y $\displaystyle H(x) \equiv \int_a^{g(x)} f(t,x)\, dt$, con g dada y derivable. Calcule $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)$ y $H'(x)$.

14. Utilice el Teorema de Fubini para probar que $f_{xy} = f_{yx}$ si éstas son continuas. *Ind.* Si $f_{xy}(x_0) - f_{yx}(x_0) > 0$ entonces por continuidad existe un pequeño rectángulo abierto R con $x_0 \in R$ y donde $f_{xy} - f_{yx} > 0$.

15. Bosqueje la región de integración $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$ y calcule de dos formas la integral sobre $\mathcal{D}$ de la función $f(x,y) = x \sin y$.

16. Considere los rectángulos: $R_1 = [0,1] \times [0,1]$ y $R_2 = [1,2] \times [-1,1]$. Sean $R = R_1 \cup R_2$ y la función $f(x,y) = \begin{cases} 2x - y & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + y & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Calcular $\displaystyle\int_R f$

17. Usando la definición de integral, calcule $\displaystyle\int_R f$ para:

   a) $f(x,y) = x + 4y$ y $R = [0,2] \times [0,1]$
   b) $f(x,y) = 3x^2 + y$ y $R = [0,2] \times [0,1]$

   Ind.: $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,
   $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
   $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = (\sum\limits_{k=1}^{n} k)^2$.

18. Probar que $\displaystyle\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n\, dx_{n-1} \cdots dx_2\, dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt.$

19. Muestre que $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{\infty} (e^{-xy} - 2e^{2xy})\, dx\, dy \neq \int_1^{\infty} \int_0^1 (e^{-xy} - 2e^{2xy})\, dx\, dy.$

20. Dibuje la región de integración y calcule la integral correspondiente.

   a) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, x^2 + y^2 \geq 1\}$ y $f(x,y) = x^2$.
   b) $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 + x, 0 \leq z \leq 2\}$ y $f(x,y,z) = x^2 + z$.
   c) $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq x + y\}$ y $f(x,y,z) = x + y + z$.

21. Dibuje la región $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \leq 4 - 4x^2 - y^2, z \geq 0\}$ y exprese el volumen de $\mathcal{D}$ como una integral triple y también como una integral doble.
   Calcule el volumen de $\mathcal{D}$.

22. Sea $T(u,v) = (x,y) = (u^2 - v^2, 2uv)$.

   a) Sea R el cuadrado de vértices $(1,1), (1,3/2), (3/2,1), (3/2,3/2)$. Dibuje $T(R)$.
   b) Dibuje $T'(1,1)(R)$, es decir, la imagen de R bajo la función $T'(1,1)$.
   c) Dibuje $T(1,1) - T'(1,1)(1,1)$.
   d) Encuentre el área de R y de $T(R)$.

23. Sea $T(u,v) = (x,y) = (u\cos v, u\sin v)$

   a) Sea R el cuadrado de vértices $(0,0), (0,\pi/2), (\pi/2,0), (\pi/2,\pi/2)$. Dibuje $T(R)$.
   b) Dibuje $T'(\pi/2,0)(R)$.
   c) Dibuje $T(\pi/2,0) - T'(\pi/2,0)(\pi/2,0)$.
   d) Calcule el área de R y de $T(R)$.

24. Sea T como en la pregunta 21 y $\mathcal{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u^2+v^2 \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$.

a) Dibuje $S = T(\mathcal{D})$. b) Calcule $\displaystyle\int_S \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

25. Sean $T(u,v) = (x,y) = (u+v, u^2-v)$ y $\mathcal{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u+v \leq 2, u \geq 0, v \geq 0\}$.

a) Dibuje $S = T(\mathcal{D})$. b) Calcule $\displaystyle\int_S \frac{dxdy}{\sqrt{1+4x+4y}}$.

26. Sean $T(u,v) = (x,y) = (u, v(1+u^2))$ y $\mathcal{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\}$.

a) Dibuje $S = T(\mathcal{D})$. b) Calcule $\displaystyle\int_S x\,dx\,dy$.

27. Sea

$$I = \int_0^1 \int_w^1 \int_x^1 \sin(x^3)\,dx\,dy\,dw.$$

a) Escriba I como una integral iterada $\iiint \ldots dy\,dx\,dw$ y deduzca que

$$I = \int_0^1 \int_w^1 (x-w)\sin(x^3)\,dx\,dw.$$

b) Escriba la integral de la parte anterior como $\iint \ldots dw\,dx$ y calcule I.

28. Sean $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ y

$$D_1 = \{(x,y,z) : -\sqrt{4-x^2-y^2} \leq z \leq 0\}, \quad D_2 = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

a) Encuentre $\iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dV$.

b) Considere las coordenadas $x = 2\rho\sin(\theta)\cos(\varphi)$, $y = 2\rho\sin(\theta)\sin(\varphi)$, $z = \rho\cos(\theta)$. Describa D_2 en estas coordenadas y calcule el Jacobiano de este cambio de variables.

c) Encuentre $\iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dV$ y $\iiint_D f(x,y,z)\,dV$.

29. Calcule el volumen de la región

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1, \quad x^2+y^2 \leq z^2, \quad z \geq 0.$$

Solución:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \rho^2 \sin(\theta)\,d\theta d\varphi d\rho.$$

30. Sea $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ y $(u,v) = T(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$.

a) Encuentre $D = T(\Omega)$. Bosqueje Ω y D. Verifique que T es inyectiva en Ω.

b) Si $f : D \to R$ es continua exprese $\iint_D f(u,v)\,du\,dv$ como una integral sobre Ω en términos de las variables x e y. Justifique.

c) Calcule

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{|x^2-y^2|}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

31. Considere una función continua $f : [-M, M] \to \mathbb{R}$ y definamos

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \, dt.$$

Pruebe que $\Delta u = 0$ en $H = \{(x,y) : y > 0\}$, donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ es el operador Laplaciano.

<u>Comentario</u>: el hecho que $\Delta u = 0$ en H no depende del factor $\frac{1}{\pi}$ en la definicin de u. Este sirve para lo siguiente:

$$\lim_{y \to 0^+} u(x,y) = f(x) \qquad \forall x \in (-M, M).$$

¿Lo puede probar?

32. Sea $D = \{(x,y,z) : 0 < x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^2\}$. Determine si existe (y calcule)

$$\iiint_D (4x^2 + 2y^2 + z^2)^{-5/4} \, dxdydz.$$

Indicación: Considere el cambio de variables $x = \frac{1}{2}u$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}v$, $z = w$ y describa D en las coordenadas (u, v, w).

33. a) Demuestre que $\int_a^b \int_a^y f(x) dx dy = \int_a^b (b-x) f(x) dx$

b) Pruebe por inducción que $\int_a^b \int_a^{x_n} \ldots\ldots \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 \ldots\ldots dx_{n-1} dx_n = \int_a^b \frac{(b-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} dx$

34. Pruebe que:

a) $\int_0^1 \{\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy\} dx = \frac{1}{2}$ y que

b) $\int_0^1 \{\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx\} dy = -\frac{1}{2}$ y explique por qué no es aplicable Fubini a este problema.

35. Pruebe que:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} \, dydx = \frac{e-1}{2}$$

Indicación: Aplique la transformación $x + y = u$ y $y = uv$.

36. Sea R la región limitada por $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Probar que:

$$\int_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy = \operatorname{sen} 1$$

Indicación: Haga el cambio de variables $u = x - y$, $v = x + y$.

37. Si R es la región $x^2 + xy + y^2 \leq 1$, probar que

$$\int_R e^{-(x^2+xy+y^2)} dxdy = \frac{2\pi(e-1)}{\sqrt{3}}$$

Indicación: Sean $x = u\cos\alpha - v\,\mathrm{sen}\,\alpha$ y elíjase α de modo que se elimine el término en xy del integrando. Luego tome $u = a\rho\cos\theta$, $v = b\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ con a y b elegidos convenientemente.

38. Comprobar que la sustitución de variables $x + y = \xi$, $y = \xi\eta$ transforma el tríangulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$ en el cuadrado $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$.

39. Sea R la región $x^2 + y^2 \leq a^2$. Probar que si m y n son enteros positivos y al menos uno de ellos es impar entonces se tiene que $\int_R x^m y^n dxdy = 0$