Guía N^{o}3 Ma22a-04 2006-1

Cálculo en Varias Variables

1. Máximos, Mínimos y Multiplicadores de Lagrange

1. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones, clasifíquelos. Encuentre (si existen) extremos globales.
   a) $\sin x \cosh y$
   b) $x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$
   c) $x^2 - 2y^2 - x$
   d) $x^4 + y^4$
   e) $\exp\big(-\sum_{j=1}^{m} x_j^2\big)$
   f) $x^2 + y^2 + z^2 - 1$
   g) $(2x + y)\exp(-4x^2 - y^2)$
   h) $\sum_{j=1}^{m} \|x - p_j\|^2$, $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^N$ fijos y dados.
2. Encuentre el mínimo de la función $f(x, y) = xy + yz$ sujeta a las restricciones $x^2y^2 = 2$ y $xy = 2$.
3. Encontrar la mínima distancia de la superficie $z^2 - xy - 1 = 0$ al origen.
4. Encontrar la mínima distancia entre la recta $x + y = 4$ y la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$.
5. Encontrar los puntos de la curva $(x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, \sin(t/2))$ que están más cerca (y más lejos) del origen.
6. Se tiene un rectángulo al que se le adjunta en su parte superior un triángulo isósceles, semejando la forma de "una casa". El perímetro de la figura es dado y fijo (L). Encuentre las dimensiones de la figura que auguran área máxima.
7. Sea $f(x, y, z) = \log(xyz^3)$.
   a) Encontrar el valor máximo de f sobre $A_r \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x, y, z > 0,\ x + y + z = 5r\}$.
   b) Usando el resultado anterior, pruebe que para todo $a, b, c \geq 0$

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a + b + c}{5}\right)^5 .$$

8. Probar que para todo $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, $\quad (a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (a_1 + \cdots + a_n)$.

9. *Función de producción de Cobb-Douglas.* Una empresa funciona con un capital K y trabajo (capital humano) L, con una función de producción de Q unidades de bien de la forma $Q(K, L) = 2K^{1/2}L^{1/2}$. Por otro lado, el costo de producción viene dado por $C(K, L) = 2K + 8L$. La empresa quiere producir 8 unidades del bien pero minimizando los costos de producción. Encuentre el capital y trabajo necesarios para lograr este objetivo.

2. Teoremas de la Función Inversa e Implícita

10. Demuestre que la hipótesis "f continuamente diferenciable (C^1)" es necesaria para la validez del Teorema de la Función Inversa incluso en el caso $N = 1$. Para ello considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2x^2 \sin(1/x)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Probar que $f'(0) = 0$, f' es acotada en $(-1, 1)$ pero no es localmente invertible en $x = 0$.

11. Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

    a) Demuestre que para todo $(a, b) \neq (0, 0)$, f es invertible localmente en (a, b).

    b) Demostrar que f no es inyectiva.

    c) Calcular aproximadamente $f^{-1}(-3{,}01\ ,\ 3{,}98)$. *Ind.*: Use Taylor y note que $f(1, 2) = (-3, 4)$.

12. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciables y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = [f(x, y, z), g(x, y, z), f(x, y, z) + g(x, y, z)]$. Probar que F no posee inversa diferenciable.

13. *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable. Mostrar que f no es inyectiva. *Ind.*: Si $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ considere $g(x, y) = (f(x, y), y)$, $g : A \to \mathbb{R}^2$.

    b) Probar el mismo resultado si ahora $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ con $m < N$.

14. Encontrar el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que y puede ser definida implícitamente en función de x en la relación $(x - 2)^3 y + xe^{y-1} = 0$. Verifique que $(1, 1)$ es uno de tales puntos, y calcule aproximadamente $y(x)$ para $x = 0{,}98$.

15. Calcular $y'(x)$ e $y''(x)$ en $x = 1$ si
$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

16. Sea $z = z(x, y)$ una función diferenciable definida implícitamente por la relación $z = xf(y/z)$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable. Muestre que
$$2(x, y) \cdot \nabla z(x, y) = z(x, y).$$
Ind.: Considere $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = z - xf(y/z)$.

17. Muestre que las ecuaciones
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0 \end{cases}$$
determinan funciones $u(x, y)$, $v(x, y)$ en torno al punto $(x, y) = (2, -1)$, tales que $u(2, -1) = 2$ y $v(2, -1) = 1$. Calcule además $\frac{\partial u}{\partial x}(2, -1)$ y $\frac{\partial v}{\partial y}(2, -1)$.

18. Dado el sistema
$$\begin{cases} 3x + y - z + u^2 = 0 \\ x - y + 2z + u = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u = 0 \end{cases}$$
determine qué trío de variables puede ser dejado en función de la restante para resolver el sistema.

19. Considere el siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} \sin(x_1 y_1) + x_3 \cos(y_2) = 0 \\ y_2 + x_1^2 + \sinh^2(x_2) = 0 \end{cases}$$

Encontrar los valores de $\frac{\partial y_1}{\partial x_2}(1,0,0)$ y $\frac{\partial y_2}{\partial x_3}(1,0,0)$.

20. Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ y suponga que x_0 es una raíz de $p(x)$ tal que $p'(x_0) \neq 0$. Pruebe que existe $\delta > 0$ tal que para $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ con $|b_i - a_i| < \delta \ \forall i = 0, \ldots n$ el polinomio $Q(x; b_0, b_1, \ldots, b_n) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ tiene una única raíz en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, que denotamos por $\varphi(b_0, \ldots, b_n)$. Pruebe también que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_j}(b_0, \ldots, b_n) = -\frac{\varphi(b_0, \ldots, b_n)^j}{\frac{\partial Q}{\partial x}(\varphi(b_0, \ldots, b_n); b_0, \ldots, b_n)} \quad \forall j = 0, \ldots, n.$$

Dé un ejemplo que muestre que la hipótesis $p'(x_0) \neq 0$ es necesaria.

21. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función C^2 y $x_0 \in D$ un punto crítico de f. Decimos que x_0 es un punto crítico aislado si existe $R > 0$ tal que x_0 es el único punto crítico en $B_R(x_0)$. Pruebe que si x_0 es un punto crítico de f tal que $Hf(x_0)$ es invertible, entonces x_0 es aislado.

Encuentre los puntos críticos de

$$f(x, y) = xy \sin(x),$$

determine cuáles no son aislados y clasifique aquellos que sean aislados.