FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
U de CHILE

Pauta P1 C2 MA22A-4 2007/01

Parte a)

Calculamos el gradiente.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{df}{dx_1} \\ \dfrac{df}{dx_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 4x_1^3 \\ -2x_2 + 4x_2^3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \textbf{\textit{(1.0)}}$$

Para encontrar puntos críticos imponemos que $\nabla f = 0$:

$$\Rightarrow -2x_1 + 4x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \textbf{\textit{(0.1)}}$$

Análogamente para x_2

$$\Rightarrow -2x_2 + 4x_2^3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \vee x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \textbf{\textit{(0.1)}}$$

Con esto nos queda que existen 9 posibles puntos críticos, que son los siguientes:

$$(0,0);\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \textbf{\textit{(0.2 c/u)}}$$

(Total a) 3.0)

Parte b)

Calculamos el Hessiano:

$$H = \begin{pmatrix} \nabla \dfrac{df}{dx_1}^T \\ \nabla \dfrac{df}{dx_2}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2 f}{dx_1^2} & \dfrac{d^2 f}{dx_1 x_2} \\ \dfrac{d^2 f}{dx_2 x_1} & \dfrac{d^2 f}{dx_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+12x_1 & 0 \\ 0 & -2+12x_2 \end{pmatrix}$$

ahora evaluamos en $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y se tiene:

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$ es un mínimo local.

(1.0)

Parte c)

Para sacar el vector normal, despejamos $y = f(x,z)$ y tomamos ∇f , así:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 4z \end{pmatrix}$$

luego:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} f_x \\ -1 \\ f_z \end{pmatrix}(2,1) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \\ 4z \end{pmatrix}(2,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{\textit{(1.0)}}$$

Otra forma sería tomar ∇S , con $S = x^2 - y + 2z^2$

$$\nabla S = \begin{pmatrix} \frac{dS}{dx} \\ \frac{dS}{dy} \\ \frac{dS}{dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \\ 4z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \nabla S(2,6,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La ecuación normal del plano tangente esta dada por:

$$\left\langle \vec{n}, \begin{matrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{matrix} \right\rangle = 0$$

En este caso

$$\left\langle \begin{matrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{matrix}, \begin{matrix} x-2 \\ y-6 \\ z-1 \end{matrix} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow 4(x-2) - (y-6) + 4(z-1) = 0$$
$$\Rightarrow \pi := 4x - y + 4z = 6 \qquad \textbf{\textit{(1.0)}}$$

(Total c) 2.0)