Pauta P2 C1

a) $Dom(h) = \mathbb{R}^N \setminus 0$ $\qquad 1.5\, ptos$

b) $h(x) = \frac{x}{||x||^2}$

$f(x) = x$ es continua en $\mathbb{R}^N$

$g(x) = \frac{1}{||x||^2}$ es continua en $\mathbb{R}^N \setminus 0$

$\Rightarrow h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $\mathbb{R}^N \setminus 0$

(por álgebra de funciones continuas) $\qquad 1.5\, ptos$

c) $||x|| > 1 \Rightarrow ||h(x)|| = \frac{||x||}{||x||^2} < 1$

$\Rightarrow h(A) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid ||y|| < 1\}$ $\qquad 1\, pto$

d) $h(x) = x \ \Rightarrow \ ||h(x)|| = ||x|| \ \Rightarrow \ ||\frac{x}{||x||^2}|| = \frac{1}{||x||} = ||x|| \ \Rightarrow \ ||x|| = 1$

$\Rightarrow$ todos los puntos $\{x \mid ||x|| = 1\}$ son puntos fijos de h $\qquad 1\, pto$

e) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \ \Rightarrow$ f es coerciva

$\Rightarrow \exists x_0 \in B$ tal que $f(x_0) = \underset{x \in B}{min}\, f(x)$

[en otras palabras, sea $M = \underset{||x||=1}{max}\, f(x)$ y sea R tal que

$\forall ||x|| > R \quad f(x) > M$. El conjunto $C = \{x \mid 1 \leq ||x|| \leq R\}$ es compacto

$\Rightarrow f$ alcanza su minimo en C y $\underset{x \in C}{min}\, f(x) < M$]

$h(x) = \frac{x}{||x||^2} = x_0 \ \Rightarrow \ x = x_0 ||x||^2 \, , ||x|| \leq 1$

$\Rightarrow \ g(x) = f(x_0) \leq f(y) \quad \forall y \in \{y \mid ||y|| \geq 1\}$

$\Rightarrow \ g(x) \leq f(\frac{z}{||z||^2}) \quad \forall ||z|| \leq 1$

$\Rightarrow \ g$ alcanza su mínimo en $S \setminus 0$ $\qquad 1\, pto$