FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
U de CHILE

Pauta P1 C1 MA22A-4 2007/01

Parte a)

La norma es una función continua $\Rightarrow$ $f(x) = \|x - x_0\|$ es continua.

(1.5)

Parte b)

A es un conjunto cerrado y acotado, $f : A \to \Re$ continua, luego por teorema de $Bolzano - Weierstrass$, $f(x) = \|x - x_0\|$ alcanza su mínimo y máximo en A.

(1.5)

Parte c)

$f(x) \geq 0, \forall x \in A \Rightarrow \min\limits_{x \in A} f(x) \geq 0$

Sea $x_1 \in A$ tal que $\min\limits_{x \in A} f(x) = f(x_1) = \|x_1 - x_0\|$

Si $\|x_1 - x_0\| = f(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = x_0$. Pero $x_0 \notin A, \rightarrow\leftarrow$

(1.0)

Parte d)

Observemos que $x_1 \in A(c)$ (x_1 de la parte (c))

Si $A(c)$ es un conjunto abierto $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$ tal que $B(x_1, \delta) \subset A(c)$

Sea $v = \dfrac{x_0 - x_1}{\|x_0 - x_1\|}$.

Entonces $y = x_1 - \dfrac{\delta}{2} v \in B(x_1, \delta)$ pues $\|v\| = 1$

Además: $\|x_0 - y\| = \left\|(x_0 - x_1)(1 - \dfrac{\delta}{2})\right\| = (1 - \dfrac{\delta}{2})\|x_1 - x_0\| = (1 - \dfrac{\delta}{2}) f(x_1) < \min\limits_{x \in A} f(x)$

$\Rightarrow y \notin A \Rightarrow y \notin A(c) \subset A, \rightarrow\leftarrow$ contradicción

$\Rightarrow A(c)$ ***NO*** es abierto. (Como subconjunto de $\Re^n$)

($A(c)$ es abierto relativo a A)

(1.0)

Parte e)

1) $Adh(A(c)) = A \cap \{x \mid f(x) \leq c\}$

2) $Int(A(c)) = A(c) \cap Int(A)$

3) $Fr(A(c)) = [A(c) \cap Fr(A)] \cup \{x \mid f(x) = c\}$

(1.0)