

- P11** Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ con $\|A\| < 1$. El objetivo es probar que $I-A$ es invertible.
- Pruebe que B es la inversa de $I-A$ ss: B es pto. fijo de $T: M_{nn}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{nn}(\mathbb{R})$ definida mediante $T(B) = I + AB$
 - Demuestre que T tiene un único pto. fijo en $M_{nn}(\mathbb{R})$
 - Verifique que para la suc. definida por: $B_{k+1} = T(B_k)$, $B_0 = I$ se tiene que $T(B_k) = \sum_{j=0}^{k-1} A^j$ y que entonces:

$$(I-A)^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} A^j$$

Ind.: Recordar que $M_{nn}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, por lo cual el Teo. del pto. Fijo de Banach tb es válido; considerando la norma Euclidianas $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$, para la cual se satisface

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Dem.:

$$(i) \quad \text{PD} \quad B \text{ inversa de } I-A \Leftrightarrow B \text{ pto. fijo de } T(B) = I+AB$$

$$\begin{array}{ccc} \Uparrow & & \Downarrow \\ B = (I-A)^{-1} & & B = I+AB \end{array}$$

$$\Rightarrow B = (I-A)^{-1} / (I)^{-1} \Rightarrow B^{-1} = I-A / +A \Rightarrow B^{-1} + A = I / (I) \cdot B$$

$$\Rightarrow B^{-1} \cdot B + A \cdot B = I \cdot B$$

$$\therefore I + AB = B$$

$\Leftarrow$ Asumiremos que $(I-A)$ es invertible (*)

$$B = I + AB \Rightarrow B - AB = I \Rightarrow (I-A)B = I \Rightarrow B = (I-A)^{-1}$$

(*) Teniendo en cuenta que en (ii) deberemos probar que nuestro candidato B es efectivamente la inversa de $(I-A)$

(ii) Por TPF, probemos que $T(B)$ es una contracción

Sean $B_1, B_2 \in M_{nn}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|T(B_1) - T(B_2)\| &= \|I + AB_1 - (I + AB_2)\| = \|A(B_1 - B_2)\| \\ &\leq \underbrace{\|A\|}_{<1} \|B_1 - B_2\| \end{aligned}$$

Luego, T es Lipschitz de cte $\|A\| < 1 \Rightarrow$ contracción
 $\xrightarrow{\text{TPF}} T$ posee un único pto fijo en $M_{nn}(\mathbb{R})$ (cerrado)
 $\therefore \exists! B \text{ t.q. } B = I + AB$

puede ser cualquiera en TPF

(iii) $B_{k+1} = T(B_k)$ $B_0 = I$ define una suc. convergente a B (por TPF)

Notemos que:

$$B_1 = T(B_0) = I + A \cdot I = I + A$$

$$B_2 = T(B_1) = I + A \cdot B_1 = I + A(I + A) = I + A + A^2$$

En genl.: $B_k = \sum_{j=0}^k A^j$. Lo probaremos por inducción $k=0$ ✓

$$k \rightarrow k+1 \quad B_{k+1} = T(B_k) = I + A \cdot B_k = I + A \cdot \left(\sum_{j=0}^k A^j \right) = I + (A + A^2 + \dots + A \cdot A^{k-1} + A^k)$$

$$B_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} A^j //$$

Como sabemos que conv. tomemos $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^j$$

$$B = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^j$$

OBS.: • Notar que generaliza a $\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$ • Pto.: Probar con este ejercicio que $\{A; A \text{ es inv}\}$ es un abierto sobre $M_n(R)$ (con la norma definida antes)Paréntesis: por (A) debemos probar que B efectivamente es la inversa de A ~~$B(I-A)$~~

$$B(I-A) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^j \right) \cdot (I-A) \xrightarrow{\text{cat. del pto.}} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k (A^j - A^{j+1})$$

$$\xleftarrow{\text{alg. de límites}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^j - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^{j+1}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^j - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^j + A^0 = I$$

(Suma y resto A^0)

$$(I-A) \cdot B = (I-A) \cdot \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^j \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^j - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^{j+1}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^j - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k A^j + I = I$$

PS1 Sean $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ii) g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{y - x^2} & y \neq x^2 \\ 0 & y = x^2 \end{cases}$$

Para estas f.c.s.

- a) Estudie las derivadas parciales en $(0, 0)$ y su continuidad en ese pto
b) ¿Son diferenciables en $(0, 0)$?

Sol.:

i) Si $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x \cdot y^2(x^2 + y^2) - x^2 y^2 \cdot (2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3 y^2 + 2x y^4 - 2x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Si $(x, y) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{h^2 \cdot 0^4}{h^2 + 0^2} - 0}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$ PD $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)| < \epsilon \quad \forall \|(x, y)\| < \delta$

$$\left| \frac{2x y^4}{(x^2 + y^2)^2} - 0 \right| = \frac{2|x| y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{2|x| y^4}{y^4} = 2|x|$$

Ahora, como $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\| < \delta$
tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq 2|x| \leq 2 \cdot \delta = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Con lo cual $\frac{\partial f}{\partial x}$ es cont. en todo pto.

Analogamente (y por simetría de la f.c) $\frac{\partial f}{\partial y} \exists$ y es continua en todo pto $\Rightarrow f$ diff. en todo pto.

ii) Si $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2x \cdot y(y - x^2) - x^2 y \cdot (-2x)}{(y - x^2)^2} = \frac{2x y^2 - 2x^3 y + 2x^3 y}{(y - x^2)^2} = \frac{2x y^2}{(y - x^2)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

Tomando: $x^2 = y - y^2 \rightarrow 0$

$$g(x, y) = \frac{(y - y^2) \cdot y}{y - (y - y^2)} = \frac{(y - y^2) \cdot y}{y^2} = \frac{y - y^2}{y} = 1 - y \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1 \neq 0$$

Con lo cual g no es continua

$\Rightarrow$ g no es diferenciable en $(0,0)$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^2(y-x^2) - x^2y \cdot 1}{(y-x^2)^2} = \frac{\cancel{x^2y} - x^4 - \cancel{x^2y}}{(y-x^2)^2} = \frac{-x^4}{(y-x^2)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h+0,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Usando el mismo camino de antes $x^2 = y - y^2$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-(y-y^2)^2}{(y-y+y^2)^2} = \frac{-(y^2-2y^3+y^4)}{y^4} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \text{diverge}$$

Con lo cual $\frac{\partial g}{\partial y}$ no es cont en 0

(Lo mismo se puede hacer con $\frac{\partial g}{\partial x}$) ppto.

24) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \|x,y\|^2 \sin\left(\frac{1}{\|x,y\|}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Calcular $\nabla f(0,0)$

b) Probar que f es diferenciable en $(0,0)$

c) Probar que las derivadas parciales de f no son continuas en $(0,0)$

Sol.:

$$a) \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{|h|}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{|h|}\right) = 0$$

Por simetría de f $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

b) Probaremos que $\exists d \in \mathbb{R}^n$ tal
 $f(x,y) - f(0,0) = d^T \cdot (x,y) + o(\|(x,y)\|)$

Para esto estimamos:

$$f(x,y) - f(0,0) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = 0 \neq \text{[scribble]}$$

$$\text{Pero } \frac{(x^2 + y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow 0} 0$$

con lo cual $f(x,y) - f(0,0) = o(\|(x,y)\|)$

$$\Rightarrow \exists d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tal } f(x,y) - f(0,0) = d^T \cdot (x,y) + o(\|(x,y)\|)$$

$\therefore f$ es diff.

$$c) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \|x,y\|^2 \right) \cdot \sin\left(\frac{1}{\|x,y\|}\right) + \|x,y\|^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{\|x,y\|}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\|x,y\|^2}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \|x,y\|$$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \|x,y\|^2 = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2) = 2x \quad \frac{\partial}{\partial x} \|x,y\| = \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin\left(\frac{1}{\|x,y\|}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\|x,y\|}\right)$$

$(x,y) \rightarrow 0$

$\underbrace{0}_{\text{acot.}} \rightarrow 0$

no conv. no conv.

(verificar tomando sec. específicas)

$$x_n = y_n \cos\left(\frac{1}{\|x_n, y_n\|}\right) = 1 \quad \forall n \quad x_n \rightarrow 0$$

$$x_n = 0 \quad y_n \neq 0 \quad y_n \rightarrow 0$$

Luego $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \not\rightarrow 0$ si $(x,y) \rightarrow (0,0)$

Por simetría de f ocurre lo mismo con $\frac{\partial f}{\partial y}$

Erratas de la última auxiliar:

P1) (Método de Newton)

En la parte b), se puede probar que g alcanza su mín en ξ usando la condición de optimalidad de segundo orden:

$$\bar{x} \text{ pto } g \text{ de mín. de } g \Rightarrow g'(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x}) = 0$$

Esto fue lo que se vio en clases

Ahora, usando la condición de 2º orden

$$\begin{aligned} g''(\bar{x}) &= \frac{(f(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x}))' \cdot f'(\bar{x})^2 - f(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x}) \cdot 2 \cdot f'(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x})}{(f'(\bar{x}))^4} \\ &= \frac{f'(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x}) \cdot f'(\bar{x})^2 + f(\bar{x}) \cdot f'''(\bar{x}) \cdot f'(\bar{x})^2 - 2 f(\bar{x}) \cdot f'(\bar{x}) (f''(\bar{x}))^2}{(f'(\bar{x}))^4} \end{aligned}$$

$$\text{si } \bar{x} = \xi \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow g''(\bar{x}) = \frac{\underbrace{f'(\bar{x})^3}_{\substack{\downarrow \\ \text{los otros términos} \\ \text{se anulan}}} \cdot f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})^4} = \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \geq 0 \rightarrow \text{entonces } \xi \text{ es pto. de mínimo}$$

Observaciones:

-) Haciendo esto relajamos la condición propuesta en la auxiliar ($f''(x) \neq 0 \forall x$), pero agregamos la condición de que f debe ser 3 veces diferenciable (al menos en ξ).

-) En la parte b), cuando se habla de mínimos se refiere a mínimo local; esto último es suficiente para hacer las afirmaciones en c)

P3) En el caso 3) $a \neq 0$ y $t \neq 0$ la derivada se calcula así:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(a(t+\lambda)) - f(a)}{\lambda} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|a(t+\lambda)\|}{\lambda} g\left(\frac{a(t+\lambda)}{\|a(t+\lambda)\|}\right) - \frac{\|at\|}{\lambda} g\left(\frac{at}{\|at\|}\right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|a\|}{\lambda} \left((t+\lambda) g\left(\frac{a}{\|a\|} \operatorname{sgn}(t+\lambda)\right) - t g\left(\frac{a}{\|a\|} \operatorname{sgn}(t)\right) \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|a\|}{\lambda} \left(\underbrace{(t+\lambda) \operatorname{sgn}(t+\lambda)}_{=|t+\lambda|} g\left(\frac{a}{\|a\|}\right) - t \operatorname{sgn}(t) g\left(\frac{a}{\|a\|}\right) \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|a\|}{\lambda} g\left(\frac{a}{\|a\|}\right) ((t+\lambda) - t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|a\| g\left(\frac{a}{\|a\|}\right) \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right) \\ &= \|a\| g\left(\frac{a}{\|a\|}\right) \end{aligned}$$