Guía N^o 1 Cálculo en Varias Variables MA22A
Prof: Pierre Guiraud
Auxiliar: Raul Aliaga Diaz
Jueves 31 de Marzo del 2005

Topología

Problema 1

Dados A y B conjuntos en un e.v.n. $\vec{E}$, demuestre que:

- int(A $\cap$ B) = int(A) $\cap$ int(B).
- int(A $\cup$ B) $\supseteq$ int(A) $\cup$ int(B) (dé un ejemplo donde no hay igualdad).
- adh(A $\cup$ B) = adh(A) $\cup$ adh(B).
- adh(A $\cap$ B) $\subseteq$ adh(A) $\cap$ adh(B) (dé un ejemplo donde no hay igualdad).
- adh(A) = int(A) $\cup$ Fr(A)
  donde Fr(A)= $\{ \ \vec{x} \in \vec{E} : B(\vec{x}, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \quad y \quad B(\vec{x}, \epsilon) \cap A^c \neq \emptyset \quad \forall \epsilon > 0 \ \}$.
- A $\subseteq$ B $\Longrightarrow$ int(A) $\subseteq$ int(B) y adh(A) $\subseteq$ adh(B).
- int(A) $\cap$ B = $\emptyset$ $\Leftrightarrow$ int(A) $\cap$ adh(B) = $\emptyset$.
- adh(A) = $\rightarrow E$ y int(B) $\cap$ A = $\emptyset$ $\Longrightarrow$ int(B) = $\emptyset$.
- int(A^c)= $adh(A)^c$.
- adh(A^c)= $int(A)^c$.

Problema 2

a) Demuestre que en el e.v. $I\!R^2$ la función:

$$||\vec{x}||_c = [\frac{{x_1}^2}{9} + 4{x_2}^2]^{\frac{1}{2}}$$

es una norma. Dibuje B(0,1).
b) Demuestre que en el e.v. C($[a, b]$, $I\!R$) la función:

$$||f||_2 = [\int_a^b f(t)^2 dt]^{\frac{1}{2}}$$

es una norma.

Problema 3
Dado:

$$A = \{\frac{(-1)^n}{n}\}_{n \in I\!\!N} \cup ((\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) \cap Q)$$

(donde Q son los racionales). Hallar int(A), adh(A), Fr(A).

Problema 4
Sea $\vec{E}$ un e.v.n., diremos que $A \subseteq \vec{E}$ es **denso** si adh(A)=$\vec{E}$.

a) Demuestre que si $A \subseteq B$ y A es denso entonces B es denso.
b) Demuestre que su $A \subseteq I\!\!R^n$ es denso $\Leftrightarrow$ Para todo B abierto no vacío se verifica que $B \cap A \neq \emptyset$.
c) Probar que si A es denso y U es abierto $\Longrightarrow \quad U \subseteq adh(A \cap U)$.
d) Dé un ejemplo de denso en $I\!\!R$.
e) Se dice que $\vec{E}$ es **separable** si $\exists$ A denso numerable contenido en $\vec{E}$, ¿es $I\!\!R$ separable ?, ¿y $I\!\!R^n$? .

Sucesiones

Problema 5

En el e.v. C($[0,1], I\!\!R$), se define:

$$||f||_1 = [\int_a^b |f(t)|dt]$$

a) Demuestre que $|| \bullet ||_1$ es una norma.
b) Demuestre que la sucesión $\{f_k\}$ definida por:

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -2^k(x - \frac{1}{2}) + 1 & si \quad x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}] \\ 0 & si \quad x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k}, 1] \end{cases}$$

es de Cauchy con la norma $|| \bullet ||_1$, y que no es convergente.

Problema 6

a) Sea $|| \bullet ||_1$ una norma en el e.v. $\vec{E}$, y $\{a_k\}$ una sucesión de Cauchy respecto a dicha norma. Demostrar que si $|| \bullet ||_2$ es otra norma equivalente a $|| \bullet ||_1$, entonces $\{a_k\}$ es sucesión de Cauchy también con respecto a $|| \bullet ||_2$. Si $\vec{E}$ es Banach con la norma $|| \bullet ||_1$, ¿es $\vec{E}$ Banach con respecto a $|| \bullet ||_2$?.
b) Demuestre que dos sucesiones de Cauchy (x_k), $(y_k) \subseteq I\!\!R^n$ tienen el mismo límite si y solamente si:

$$\lim_{k \to \infty} ||x_k - y_k|| = 0$$