Control 2 MA22A Cálculo en Varias Variables
Semestre 2005-1

4 de mayo de 2005

Profesor: P. Guiraud — Auxiliar : R. Aliaga

Problema 1. a) (4 pts) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Mostrar que las derivadas parciales de f existen en todo $\mathbb{R}^2$.

ii) Dar el dominio de diferenciabilidad de f.

b) (1 pt) Sea f la funcion de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = x^x + \log(x)\arctan(\arctan(\cos(xy))).$$

Calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(1, \pi/2)$.

c) (1 pts) Sea $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la función lineal definida por $L(x) = Bx$. Demostrar que la función

$$f = \pi_i \circ L + \pi_j - 2L$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^n$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Problema 2. a) (2 pts) Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tienen como matriz jacobiana:

$$Dg(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & u^2 \\ u & e^v \\ 3u & \operatorname{sen} v \end{pmatrix} \qquad Df(x,y) = \begin{pmatrix} x & x+y \\ x+y & x-y \end{pmatrix}.$$

Decir en cual conjunto $g \circ f$ es diferenciable. Sabiendo que $f(1,2) = (1,0)$ dar la matriz jacobiana de $g \circ f$ en el punto $(1,2)$.

b) (4 pts) Sean f y g definidas por:

$$f(x,y) = (x\cos y, x \operatorname{sen} y) \quad \text{con} \quad -\pi/2 < y < -\pi/2 \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(u,v) = \left(\sqrt{u^2+v^2}, \arctan(v/u)\right) \quad \text{con } u > 0 \quad \text{y} \quad v \in \mathbb{R}.$$

i) Dar $g \circ f$ y $f \circ g$. Determinar si $Dom(g \circ f) = Dom(f)$ y si $Dom(f \circ g) = Dom(g)$.

ii) ¿ En que puntos de su dominio de definición $g \circ f$ y $f \circ g$ son diferenciables ?

iii) Encontrar $D(g \circ f)(x,y)$ y $D(f \circ g)(u,v)$ cuando existen.

Problema 3. a) (2 pts) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbb{R}^n$. Mostrar que para todo a y b en $\mathbb{R}^n$ existen $c \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^n$ unitario tal que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(c) = \frac{f(a) - f(b)}{\|a-b\|}.$$

b) (4 pts) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Sea $G_f = \{(x, y, f(x,y)) \text{ tq } (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ el grafo de f. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.

i) Muestre que G_f es un conjuto de nivel de F.

ii) Demuestre que $\nabla F = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$.

iii) Supongamos que $f(x,y) = xy + ye^x$. Encuentre el vector normal y el plano tangente en el punto $(1, 1, f(1,1))$ del grafo de f.

TIEMPO: 3 HORAS.