MA22A – Guía III

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Julio Backhoff, Juan Campos

31 de mayo de 2007

(1) Hallar los extremos de f sujetos a las restricciones enunciadas:

a. $f(x, y, z) = x - y + z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
b. $f(x, y) = x - y$, $x^2 - y^2 = 2$.
c. $f(x, y) = x$, $x^2 + 2y^2 = 3$.
d. $f(x, y, z) = x + y + z$, $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$.
e. $f(x, y) = 3x + 2y$, $2x^2 + 3y^2 = 3$.

(2) Hallar los extremos de f en el conjunto S:

a. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $S = \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
b. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $S = \{(x, y) \mid y \geq 2\}$.
c. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $S = \{(x, \cos x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
d. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $S = \{(x, y, z) \mid z \geq 2 + x^2 + y^2\}$.

(3) Encuentre los extremos de f en los conjuntos dados

a. $f(x, y) = x^2 + 24xy + 8y^2$, en la región $x^2 + y^2 \leq 25$. *Respuesta:* Max $\pm(3, 4)$, min $\pm(4, -3)$.
b. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$, en la región $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$. *Respuesta:* Max $(1, 0)$, min $(3, 0)$.
c. $f(x, y) = x^2 + y^2 + (2\sqrt{2}/3)xy$, en la región $x^2 + 2y^2 \leq 1$. *Respuesta:* Max $(\pm 2/\sqrt{5}, \pm 1/\sqrt{10})$, min $(0, 0)$.

(4) Los planos $x + y - z - 2w = 1$ y $x - y + z + w = 2$ se intersectan en un conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^4$. Encuentre el punto de $\mathcal{F}$ más cercano al origen.RECUERDE que para usar el Teo. de los multiplicadores de

lagrange con varias restricciones debe probar independencia lineal de los gradientes de las restricciones.

Respuesta: $(\frac{27}{19}, -\frac{7}{19}, \frac{7}{19}, -\frac{3}{19})$

(5) Encuentre el punto de la curva

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

que está más lejos del origen. *Respuesta:* (-1,0,1).

(6) Pruebe, (resolviendo un problema de minimización adecuado) que si $a_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$ entonces

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

(7) Mostrar que la ecuación

$$x^3 z^2 - z^3 y x = 0$$

es soluble para z como función de (x, y) cerca de $(1, 1, 1)$ pero no cerca del origen. Calcular $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ en $(1, 1)$.

(8) Sea (x_0, y_0, z_0) un punto del lugar geométrico definido por $z^2 + xy - a = 0$, $z^2 + x^2 - y^2 - b = 0$, donde a y b son constantes

a. ¿Bajo qué condiciones la parte de este lugar geométrico que está cerca de (x_0, y_0, z_0) puede representarse en la forma $x = f(z)$, $y = f(z)$?

b. Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$.

(9) ¿Es posible resolver

$$\begin{aligned} xy^2 + xzu + yv^2 &= 3 \\ u^3 yz + 2xv - u^2 v^2 &= 2 \end{aligned}$$

para $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ cerca de $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(u, v) = (1, 1)$? Calcule $\partial v/\partial y$ en $(1, 1, 1)$.

(10) El problema de factorizar un polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ en factores lineales es, en cierto sentido, un problema de "función inversa". Los coeficientes a_i se pueden pensar como funciones de las n raíces r_i. Quisiéramos expresar las raíces como funciones de los coeficientes en alguna región. Considerando $n = 3$, aplique el teorema de la función inversa a este problema y enuncie la conclusión acerca de la posibilidad de hacer lo planteado.

(11) Pruebe que la ecuación $x^2/4+y^2+z^2/9 = 1$ define implícitamente una función f tal que $z = f(x, y)$ cerca del punto $(x, y, z) = (1, \sqrt{11/6}, 2)$. El grafo de esta función es una superficie. Encuentre su plano tangente en el punto $(1, \sqrt{11/6}, 2)$.

(12) Suponga que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente $z = f(x, y)$ y que $z_0 = f(x_0, y_0)$. Suponga que además la superficie definida por el grafo de f tiene un plano tangente en (x_0, y_0). Pruebe que

$$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

(13) Las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z + u - v &= 1 \\ xy + z - u + 2v &= 1 \\ yz + xz + u^2 + v &= 0 \end{aligned}$$

cerca de $(x, y, z, u, v) = (1, 1, -1, 1, 1)$, definen (x, y, z) como funciones de (u, v).

a. Encuentre el diferencial de la función implícita f en $(u, v) = (1, 1)$.
b. La función f define una superficie en $\mathbb{R}^3$. Encuentre el plano tangente a esta superficie en el punto $(1, 1)$.

(14) Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} 3xy - \sin(uv)z^2 = 3 \\ 2yv^2 + e^{uz} = 9 \\ ux + yz - 8v = -17 \end{gathered}$$

Determine qué tríos de variables pueden ser despejadas en función de las otras dos al rededor de $(x, y, z, u, v) = (1, 1, -1, 0, 2)$. Para esto recuerde probar las hipótesis del teorema correspondiente.

(15) Muestre que las ecuaciones:

$$x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0$$
$$2xy + y^2 + 3v^2 - 2u^2 + 8 = 0$$

Determinan funciones $u(x, y), v(x, y)$ en torno al punto (x,y)=(2,–1), con $u(2, -1) = 2$ y $v(2, -1) = 1$. Determine además una buena aproximación numérica para u y v cuando x=1.9 e y=-0.8

Hint: Calcule las derivadas parciales de u y v en (2,-1).

(16) Suponga que $A \subseteq \mathbb{R}^N$ es un *conjunto de medida nula* y que $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es continua. Pruebe que

a. $\int_A f = 0$

b. Si $B \subseteq \mathbb{R}^N$ es Jordan-medible entonces

$$\int_{A \cup B} f = \int_B f$$

(17) Dado un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^N$ Jordan-medible definimos

$$\mu(B) := \int_B 1$$

a. Sean B_1 , B_2 conjuntos Jordan-medibles pruebe que

$$\mu(B_1 \cup B_2) \leq \mu(B_1) + \leq \mu(B_2)$$

b. Dada una familia $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de conjuntos Jordan-medibles. Pruebe que

$$\mu(\cup_{i \in \mathbb{N}} B_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i)$$

Pruebe que si A es Jordan-medible entonces A^c también lo es.

(18) Sea $f(x, y, z) = 2x + 3y + 10z$ y $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Muestre que f es integrable sobre R y calcule su integral allí. Para ello recuerde que si existe una sucesión de reticulados tal que la diferencia entre las sumas superior e inferior tiende a cero, entonces f es integrable y su integral vale el límite de las sumas superiores (o inferiores, que es el mismo) de dicha sucesión de reticulados.

Hint: utilice reticulados equiespaciados. Note que la notación puede volverse muy engorrosa, pero es recomendable que si realiza este ejercicio, lo haga rigurosamente, pues todos tienen esto en común.

(19) Considere $f(x,y) = 2^{x+y}$ y $R = [0,1] \times [0,1]$. Muestre que f es integrable y calcule su integral sobre R.

Indicación: note que dado x fijo f es creciente en y (y al revés también). Le puede ser útil recordar el valor de $\sum_{i=0}^{m} r^i$, con r fijo, y la definición de la derivada de $g(z) = 2^z$ ($z \in \mathbb{R}$) en cero (o calcular su desarrollo de Taylor en torno a cero).