MA22A-**Cálculo en Varias Variables**
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Juan Campos y Julio Backhoff
Clase auxiliar 8

1. Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(\mathbb{R})$. Sea la transformación

$$\begin{aligned} u &= f(x) \\ v &= -y + xf(x) \end{aligned}$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, muestre que esta transformación es localmente invertible cerca de (x_0, y_0) y que la inversa tiene la forma

$$\begin{aligned} x &= g(u) \\ y &= -v + ug(u) \end{aligned}$$

2. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + y - z + u^4 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

   (a) Pruebe que para algún $\epsilon > 0$ el sistema puede ser resuelto para (x, y, u) como función de $z \in [-\epsilon, \epsilon]$, con $x(0) = y(0) = u(0) = 0$.

   (b) Pruebe que el sistema no posee solución para (x, y, z) como función de $u \in [-\partial, \partial]$, para ningún $\partial > 0$.

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ una matriz simétrica real. Encuentre la solución de los problemas (1) y (2). Justifique la optimalidad de los puntos críticos.

$$\begin{aligned} &(1) \quad \max_{||x||=1} x^t A x \\ &(2) \quad \min_{||x||=1} x^t A x \end{aligned}$$

4. Una empresa tiene 3 fábricas, en cada una de las cuales se elabora el mismo producto.Si las fábrica A produce x unidades, la B produce y y la C produce z, los costos de producción son respectivamente $(3x^2 + 200), (y^2 + 400)$ y $(2z^2 + 300)$. Si se va a surtir un pedido de 1100 unidades, determine cómo debe distribuirse la producción entre las 3 fábricas, de modo de minimizar el costo total para la empresa.

Pauta

1. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $F(x,y) = (f(x), xf(x) - y)$. Como las funciones componentes son de clase C^1, entonces F también lo es.

   El Jacobiano de la transformación en (x_0, y_0) es:

$$J_F(x_0, y_0) = \begin{matrix} f'(x_0) & 0 \\ f(x_0) + x_0 f'(x_0) & -1 \end{matrix}$$

   Ahora, el determinante de este Jacobiano es igual a $-f'(x_0)$, que es distinto de cero. Así, el Jacobiano es invertible. Luego, por el Teorema de la función inversa, la transformación F es invertible localmente en torno a (x_0, y_0) . Aún más, como f es de clase C^1 y $f'(x_0) \neq 0$ luego f es invertible en torno a x_0. Luego existe g de clase C^1 tal que localmente si $u = f(x)$ luego $x = g(u)$. Así, si $v = -y + xf(x)$ entonces usando lo anterior se tiene que $v = -y + g(u)f(g(u))$, lo que por invertibilidad de f y g implica que $y = -v + ug(u)$.

2. (a) El sistema se escribe como $G(x,y,z,u) = (0,0,0)$, para $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$G(x,y,z,u) = \begin{matrix} 3x + y - z + u^4 \\ x - y + 2z + u \\ 2x + 2y - 3z + 2u \end{matrix}$$

   Evidentemente G es de clase $C^1(\mathbb{R}^4)$ y $G(0,0,0,0) = (0,0,0)$. Fijemos $z = 0$ y consideremos $F = G(x,y,0,u)$. Así, $DF(x,y,u) = D_{(x,y,u)}G(x,y,0,u)$. Calculemos el Jacobiano:

$$J_F(0,0,0) = \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix}$$

   Veamos que es invertible. Para esto notemos que la 2° y la 3° fila son linealmente independientes (l.i.). Además, la 1° fila no se puede generar como combinación lineal de las otras 2. Así las 3 filas son l.i. y luego el Jacobiano es invertible en (0,0,0). Así, por el teorema de la función implícita, existe $\epsilon > 0$ y funciones de clase C^1 , $(x(z), y(z), u(z))$ con $z \in [-\epsilon, \epsilon]$ tales que

$$G(x(z), y(z), z, u(z)) = (0,0,0) \quad \forall z \in [-\epsilon, \epsilon]$$

   Es decir, el sistema tiene solución como función de z en torno a cero, con $(x(0), y(0), u(0)) = (0,0,0)$.

b. ¿Puede el sistema resolverse con (x,y,z) como funciones de u en alguna vecindad del cero?

No. Sumando la segunda y tercera ecuación del sistema se obtiene $3x+y-z+3u = 0$. Supongamos que efectivamente existe $\partial > 0$ tal que (x,y,z) son funciones de u en el intervalo en torno a cero de radio ∂. Así, como la primera ecuación es $3x + y - z + u^4 = 0$, se deberá tener que $u^4 = 3u$ en este intervalo. Pero esto es solo cierto si $u = 0$ ó $u = \sqrt[3]{3}$. Luego no existe tal intervalo.

3. Como A es simétrica y real, sus valores propios son todos número reales. Como $||x|| = 1 \Leftrightarrow ||x||^2 = 1$, ocuparemos esta última restricción, la que es lo mismo que decir $x^t x = 1$.

Recordemos que $\nabla(x^t Bx) = (B + B^t)x$ y por lo tanto si B es simétrica esto es igual a $2Bx$. Así el Lagrangeano del sistema es:

$$L(x, \lambda) = x^t Ax - \lambda(x^t x - 1) = x^t(A - \lambda I)x + \lambda$$

donde I es la identidad de n por n. Así, como sabemos que un punto crítico del problema de optimización con restricciones debe satisfacer $\nabla L(x, \lambda) = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} 2(A - \lambda I)x &= 0 \\ ||x|| &= 1 \end{aligned}$$

Pero sabemos que la primera ecuación es resuelta solo por los vectores propios de A, en cuyo caso λ debe ser el valor propio correspondiente. Así, los puntos críticos del problema son los vectores propios (normalizados) de A.

Ahora, sea (x, λ) un vector propio de A (normalizado) y su valor propio. Así, $Ax = \lambda x$ y luego premultiplicando por x^t se obtiene que $x^t Ax = \lambda x^t x = \lambda$. El valor de nuestra función objetivo sobre los puntos críticos es exactamente el valor propio del punto crítico. Luego, el mínimo y el máximo de $x^t Ax$ sujeto a $||x|| = 1$ es respectivamente el menor y el mayor valor propio de A, a saber, $\lambda_{\min}$ y $\lambda_{\max}$. Veamos que efectivamente, los vectores propios asociados a estos valores propios, que llamaremos $v_{\min}$ y $v_{\max}$ son óptimos.

Como A es simétrica, existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios normalizados $(v_1, ..., v_n)$ todos ortogonales entre sí (es decir una base ortonormal) , y por lo tanto todo x en $\mathbb{R}^n$ se escribe como

$$x = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

Así $x^t x = (a_1 v_1^t + ... + a_n v_n^t)(a_1 v_1 + ... + a_n v_n)$. Pero $v_i^t v_j = 1$ si $i = j$ y 0 si no. Así, $x^t x = a_1^2 + ... + a_n^2 = ||x||^2$.

Ahora, $x^t Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j v_i^t A v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j v_i^t \lambda_j v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \lambda_j v_i^t v_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i$

Así, $\lambda_{\min} \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq x^t Ax \leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^n a_i^2$ y así si $||x|| = 1$, queda que $\lambda_{\min} \leq x^t Ax \leq \lambda_{\max}$, lo que demuestra la optimalidad de $v_{\min}$ y $v_{\max}$.

4. Sea $c(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 + 900$. Así $c(x, y, z)$ es el costo total que para la empresa significa producir x unidades en A, y en B y z en C. Si se deben producir en total 1100 unidades, esto corresponde a iumponer que $x + y + z = 1100$. Así, como la empresa quiere producir estas 1100 unidades al menor costo posible, el problema se traduce a:

$$\min_{x+y+z=1100} c(x, y, z)$$

Como este es un problema de minimización con restricciones de igualdad, para encontar sus puntos críticos se debe hacer "gradiente del lagrangeano igual cero", es decir, definir:

$$L(x, y, z, \lambda) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 + 900 - \lambda(x + y + z - 1100)$$

Luego, imponiendo $\nabla L = 0$ resulta:

$$\begin{aligned} 6x - \lambda &= 0 \\ 2y - \lambda &= 0 \\ 4z - \lambda &= 0 \\ x + y + z - 1100 &= 0 \end{aligned}$$

Las primeras 3 ecuaciones dicen $6x = 2y = 4z$. Así, $y = 3x$ y $z = 3x/2$. Reemplazando en la cuarta ecuación resulta que $x = 200$, y devolviéndose, $y = 600$ y $z = 300$.

Note que los coeficientes en la función de costos van creciendo de y^2 a x^2. Esto se interpreta como que producir una unidad extra sale más barato en B, luego en C y luego en A. Entonces, ¿por qué no producirlo todo en A mejor?. La razón es que como los costos son cuadráticos, cada unidad extra me va generando un costo cada vez más grande. Así lo que le conviene al dueño de la empresa es producir mucho en la fábrica B, hasta que le sea más barato producir en C, y luego hasta que le sea más barato producir en A. Esta es justamente la respuesta que obtuvimos!!.