MA22A – Guía II

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Julio Backhoff, Juan Campos

26 de abril de 2007

(P1)
   I.
   II. Si $g(x,y) = e^{x+y}$, $f(0) = (1,-1)$, $f'(0) = (1,2)$ y $F(t) = g(f(t))$ encontrar $F'(0)$.
   III. Si $f(x,y,z) = \sin x$, $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$, encontrar $g'(\pi)$ donde $g(t) = f(F(t))$.

(P2) Una partícula se mueve a lo largo de la intersección de

   I. El paraboloide definido por

$$z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$$

   II. El cilíndro

$$x^2 + y^2 = 5$$

Si x aumenta a razón de 0,2 cms por sgdo, hallar $\frac{dz}{dt}$ en $x = 2$.

(P3) Considere el elipsoide en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$$

y el cambio de variable dado por

$$g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos\theta \sin\varphi, \rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta)$$

Calcule $\frac{\partial r}{\partial \theta}$ sobre el casco del elipsoide en el primer octante.

(P4) Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Se definen

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= \cos\varphi f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ v(r,\varphi) &= -\sin\varphi f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \cos\varphi g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

Pruebe que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}(r,\varphi) + \frac{v(r,\varphi)}{r}$$

(P5) Sea

$$g(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Muestre que

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}\right)(r,\varphi)$$

(P6) Se dice $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es *armónica* si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Pruebe que si f es armónica, entoces g definida por

$$g(u,v) = f(e^u \cos v, e^u \sin v)$$

es también armónica.

(P7) Sea $f(x,y) = e^x + \sin(x+y)$

I. Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 (que llamaremos $P(x,y)$) de f en torno a (1,0).

II. Encuentre un constante $C > 0$ tal que para cada (x,y) que satisface $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ se tiene

$$|f(x,y) - P(x,y)| \leq C\,\|(x-1,y)\|^3$$

(P8) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que existe (x_0, y_0) mínimo local de f y que además cumple

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{en } \mathbb{R}^2$$

Demuestre que todas las derivadas de orden 2 en (x_0, y_0) son nulas.

(P9) Encuentre la expansión de Taylor de orden 2 para

$$f(x,y,z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$$

en torno al punto $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

(P10) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$$

Muestre que

I. El origen es punto crítico.

II. f tiene un mínimo local en (0,0) a lo largo de cada recta que pasa por (0,0), esto es, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $F(t) = f(g(t))$ tiene un mínimo local en 0, para cada $a, b \in \mathbb{R}$.

III. (0,0) no es mínimo local de f.

(P11) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^p, ie. cuya derivada p-ésima es contínua, en el interior de su dominio (p$\geq$ 2), tal que para todo a se tiene

$$D^i f(a) = 0, \forall i = 1, ..., p - 1 y D^p f(a) \neq 0$$

Demostrar que para que a sea un mínimo (local) de f:

a. es necesario que: p sea par y $D^p f(a)(h, ..., h) \geq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$ (el vector h aparece p veces)

b. es suficiente que: p sea par y $D^p f(a)(h, ..., h) > 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$ (el vector h aparece p veces)

Indicación: Para ambas partes usar desarrollo de Taylor con resto integral. Si lo prefiere, pruebe los resultados con p=2 y generalice.

12. Pruebe que $\frac{x^2+y^2}{4} \leq e^{x+y-2}$, para $x, y \geq 0$. (Indicación: maximizar $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x-y}$ en el primer cuadrante. Para esto primero note que alcanza su máximo. Luego, encuentre el máximo para $x, y > 0$. Finalmente considere las funciones de una variable $f(x,0)$ y $f(0,y)$ y maximícelas para $x \geq 0$ e $y \geq 0$ respectivamente).

13. Pruebe que una función de clase C^3 ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) cuyo "Laplaciano":

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

es siempre positivo (estrictamente), no puede tener un máximo local. (Hint: Use Taylor).

14. Determine las dimensiones relativas de una caja rectangular sin tapa y con un volumen determinado de modo de minimizar la cantidad de material en su producción.

15. Un fabricante monopolista vende dos tipos de lámparas. Por experiencia, sabe que si produce x lámparas del primer tipo e y lámparas del segundo tipo, las puede vender respectivamente a $(100 - 2x)$ y a $(125 - 3y)$ dólares cada una. El costo de fabricación de x lámparas del primer tipo e y del segundo es $(12x + 11y + 4xy)$ dólares. ¿Cuántas lámparas de cada tipo debe fabricar a fin de lograr una utilidad máxima y cuál puede ser dicha utilidad?. (Nota: en economía, se conoce por utilidad al beneficio menos el costo).

16. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable ysean $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$G(t) = f(t, ..., t) \quad y \quad H(x_1, ..., x_n) = G(\frac{x_1 + ... + x_n}{n})$$

a. Calcular la derivada de G y el gradiente de H en términos de las derivadas parciales de f.

b. Probar que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial (f - H)}{\partial x_i} = 0$.