MA22A-**Cálculo en Varias Variables**

Profesor: Manuel del Pino

Auxiliares: Juan Campos y Julio Backhoff

Clase auxiliar 6

1. Sea una función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$, esto es, sus derivadas parciales existen y son contínuas en todo $\mathbb{R}^2$. Suponer que $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ y que además $f(x,0) > 0$ para todo x. Probar que $f(a,b) > 0$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

2. Un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se dice convexo ssi $\forall x, y \in \Omega$, $[x,y]$=$\{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$ está contenido en Ω. Sea $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con Ω un abierto, convexo y no vacío y g diferenciable en todo Ω. Demuestre que si $g' = 0$ en todo Ω, entonces g es contante en Ω.

3. Sea $T : \mathbb{R}\backslash(-\infty, 0] \times (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. $T(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$. Mostrar que T es biyectiva sobre los conjuntos definidos. Encontrar T' (la matriz Jacobiana de T) y calcular su determinante.

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática, es decir, $f(x) = x^t Ax + b^t x + c$. Con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$.Calcule el gradiente y la matriz Hessiana de f en todo punto. ¿Qué sucede si A es simétrica y definida positiva?. Ahora considere el caso en que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A = I$ (la identidad),$b = (2,-2)$ y $c = 4$.Grafique f.