

MA22A-Cálculo en Varias Variables

Profesor: Manuel del Pino

Auxiliares: Juan Campos y Julio Backhoff

Clase auxiliar 4

1. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice homogénea de grado $p \in \mathbb{R}$ si para todo $x \neq 0$ y $t > 0$ verifica $f(tx) = t^p f(x)$. Pruebe que si f es diferenciable y verifica:

$$Df(x, x) = \nabla f(x) \cdot x = pf(x) \quad \forall x \neq 0$$

Entonces f es homogénea de grado p .

2. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$, f continua y A un cerrado y acotado. Demostrar que existe un $\alpha > 0$ tal que $f(x) \geq \alpha$, $\forall x \in A$

3. Sea $\alpha > 0$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x, y) = \frac{x|y|^\alpha}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$.

(a) Determine para qué valores de α , f es continua en $(0, 0)$.

(b) Calcule las derivadas parciales de f .

(c) Determine para qué valores de α , f es diferenciable en $(0, 0)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x, y) = xy \log(|x - y|)$ si $y \neq x$ y $f(x, y) = 0$ si $y = x$.

(a) Justifique que el dominio de f es $\mathbb{R}^2$ y demuestre que el conjunto en que f es continua es $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

(b) Calcule las derivadas parciales de f y demuestre que f es diferenciable en C .