MA22A – Guía I

Profesor: Manuel del Pino
Auxiliares: Julio Backhoff, Juan Campos

30 de marzo de 2007

1. Topología

(a) Para los siguientes conjuntos, determine interior, adherencia y frontera

- I. $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2, x_1 > 0\}$
- II. $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{Q}\}$
- III. $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \geq 0, x_2 \leq \frac{1}{x_1}\}$

(b) Dados $A, B \subset \mathbb{R}^N$ demuestre que

- I. $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$
- II. $\text{int}(A \cup B) \supseteq \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$, y de un ejemplo donde no haya igualdad.
- III. $\text{adh}(A \cup B) = \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$
- IV. $\text{adh}(A \cap B) \subseteq \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$, y de un ejemplo donde no haya igualdad.

(c) Una *seminorma* en $\mathbb{R}^N$ es una función f de $\mathbb{R}^N$ a valores en $\mathbb{R}$ que satisface

- (a) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.
- (b) $f(cx) = |c|f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N$.
- (c) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Sea f una seminorma y sea

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \leq 1\}$$

Pruebe que K es cerrado, y además muestre que K es compacto si y sólo si f satisface

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

2. Límites y Continuidad

(a) Sea $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ continua, pruebe que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

- I. $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \leq \lambda\}$ es un conjunto cerrado.
- II. $I_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = \lambda\}$ es un conjunto cerrado.
- III. $A_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) < \lambda\}$ es un conjunto abierto.

(b) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow B \subset \mathbb{R}^M$, donde A es compacto, f es continua y biyectiva. Pruebe que $f^{-1} : B \rightarrow A$ es continua.

(c) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } y \geq x \\ \frac{x^2 + y^2}{|xy| + |x| + |y|} & \text{si } y < x \end{cases}$$

Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$

(d) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}$$

- I. Encuentre el conjunto donde f está bien definida, es decir encuentre $\text{Dom}(f)$, encuentre además $\text{adh}(\text{Dom}(f))$.
- II. Encuentre las curvas de nivel de f .
- III. Refiérase a la continuidad de f en $\text{Dom}(f)$. Extienda f donde sea posible.

(e) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío. Sea $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un "homeomorfismo", es decir, h es biyectiva y tanto h como h^{-1} son continuas. Además, h es uniformemente continua, esto es, h verifica que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y$ tales que $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|h(x) - h(y)\| < \epsilon$ (la diferencia con la continuidad es que el δ no depende ni de x ni de y). Queremos demostrar que bajo estas hipótesis, U debe ser igual a todo $\mathbb{R}^n$. Para esto:

- I. Pruebe que si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y cerrado a la vez, entonces $U = \mathbb{R}^n$ ó $U = \emptyset$.
- II. Pruebe que si $\{x_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy y h es uniformemente continua, entonces $\{h(x_n)\}_n$ es también una sucesión de Cauchy (en los espacios correspondientes).
- III. Recordando que en $\mathbb{R}^n$ una sucesión es convergente si y solo si es de Cauchy, deduzca que U es cerrado y concluya.

3. Derivadas

- (a) Pruebe que la función $x \in \mathbb{R}^N \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$ no es diferenciable en 0.
- (b) Una función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *homogénea de grado $p \in \mathbb{R}$* si para todo $x \neq 0$ y $t > 0$ si $f(tx) = t^p f(x)$. Pruebe que si f es diferenciable y cumple

$$Df(x; x) = pf(x) \quad \forall x \neq 0$$

entonces f es homogénea de grado p .

- (c) Sea $Q(x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j$, donde $c_{ij} = c_{ji}$ y $Q(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Sea $f(x) = [Q(x)]^{\frac{p}{2}}$, calcule Df .
- (d) Sea $f(x, y) = (xy)^{1/3}$

- I. Usando la definición de derivada direccional, pruebe que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Además muestre que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones en las cuales la derivada en $(0,0)$ existe.

- II. Demuestre que f es continua en $(0,0)$.

- (e) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \log |x - y| & \text{si } y \neq x \\ 0 & \text{si } y = x \end{cases}$$

- I. Justifique que el dominio de f es $\mathbb{R}^2$ y demuestre que el conjunto donde f es continua es

$$C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x = y\}$$

- II. Calcule las derivadas parciales de f y pruebe que f es diferenciable en C .

(f) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{y \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- I. Muestre que las derivadas parciales de f existen en todo $\mathbb{R}^2$.
 II. Encuentre el conjunto donde f es diferenciable.

(g) Sea $\alpha > 0$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- I. Determine para qué valores de α f es continua en 0.
 II. Calcule las derivadas parciales de f .
 III. Determine para que valores de α f es diferenciable en 0.

(h) Sea $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = a$

- I. Encuentre a de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.
 II. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$.
 III. Calcule, si existen, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
 IV. ¿Son $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continuas?.

(i) Definamos

$$u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2), \quad x > 0, \\ v = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad x > 0,$$

Sea $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ donde $f = f(u, v)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Pruebe que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \right)$$