Cálculo en Varias Variables

Profesor: Manuel Del Pino
Auxiliares: Juan Campos y Julio Backhoff
Clase Auxiliar II: 20 de Marzo de 2007

1. En clases se vio la equivalencia entre las definicones de continuidad mediante límites (sucesiones) y mediante el formalismo $\epsilon - \delta$.

   i. Sea f: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, demuetre que son equivalentes:

   (a) f es contínua en $\mathbb{R}^n$.

   (b) $\forall$U$\subseteq \mathbb{R}^m$, U abierto de $\mathbb{R}^m$, f^{-1}(U) es abierto de $\mathbb{R}^n$.

   (c) $\forall$V$\subseteq \mathbb{R}^m$, V cerrado de $\mathbb{R}^m$, f^{-1}(V) es cerrado de $\mathbb{R}^n$

   ii. Ahora, sea K un compacto en $\mathbb{R}^n$ y f: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua. Demuestre que f(K) es compacto en $\mathbb{R}^m$. ¿Qué sucede con f(U) , para U abierto o cerrado solamente?.

   iii. Sea f: K$\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow$ L$\subseteq \mathbb{R}^m$ contínua y biyectiva, K compacto. Demuetre que f^{-1}: L$\rightarrow$ K es contínua.

2. [Funciones Lineales] Las funciones lineales son de mucha importancia en el cálculo diferencial, por cuanto representan una primera aproximación local de las funciones diferenciables.

   i. Primero caractericemos la continuidad de una función lineal L: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.Son equivalentes:

   (a) L es contínua en $\mathbb{R}^n$.

   (b) L es contínua en $0 \in \mathbb{R}^n$.

   (c) $\exists M \geqslant 0$, tal que $||L(x)|| \leqslant M||x||, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Muestre que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \{\frac{||L(x)||}{||x||}\}$ es la menor constante M, que cumple la desigualdad anterior.

   ii. Ahora, demuestre que si L: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es lineal, entonces es contínua.

   iii. Finalmente, pruebe que $Ker(L) = \{x \in \mathbb{R}^n | \ L(x) = 0\}$ es cerrado y que [L es inyectiva $\Leftrightarrow \exists N$>0 tal que $||L(x)|| \geq N||x||$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$]

3. Estudiar la existencia del límite en (0,0) de las siguientes funciones. ¿Qué puede decir sobre su continuidad?.

   (a) $f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^4+y^6}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$

   (b) $f(x,y) = \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$

4. Determinar los valores de α para los cuales es contínua la siguiente función:

$$f(x,y) = \frac{x|y|^\alpha}{x^4+y^4+x^2} \text{ si } (x,y) \neq 0 \text{ y } f(0,0) = 0$$

Pauta Auxiliar

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

i. (b$\Leftrightarrow$c) Primero probemos la siguiente propiedad de la pre-imagen: $f^{-1}(A^c) = \{f^{-1}(A)\}^c$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$. En efecto, sea $x \in f^{-1}(A^c) \Leftrightarrow f(x) \in A^c \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in \{f^{-1}(A)\}^c$. Así, si la propiedad "b" es cierta, consideremos V$\subseteq \mathbb{R}^m$cerrado.

Luego, V=(V^c)^c, y V$^c = U$ es abierto. Así, $f^{-1}(V) = f^{-1}(U^c) = \{f^{-1}(U)\}^c$, pero $f^{-1}(U)$ es abierto luego $\{f^{-1}(U)\}^c = f^{-1}(V)$ es cerrado.

Si tomamos "c" como cierta, es análogo a lo anterior.

(a$\Rightarrow b$)Sea U abierto de $\mathbb{R}^m$.Consideremos $x_0 \in f^{-1}(U)$.Como U es abierto y $f(x_0) \in U$, $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \epsilon) \subset U$.Además, por continuidad de f en x_0, $\exists \delta > 0$ tal que si $||x - x_0||<\delta$ entonces $||f(x) - f(x_0)||<\epsilon$.Así, $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \epsilon) \subset U$. Luego $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U)$ y por lo tanto $f^{-1}(U)$ es abierto.

(b$\Rightarrow a$)Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. $f^{-1}(B(f(x_0, \epsilon))$ es abierto y x_0 le pertenece. Así, $\exists \delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0, \epsilon))$ lo que implica que $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0, \epsilon)$. Esto es equivalente a la definición $\epsilon - \delta$.

ii. Sea K un compacto de $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua. Recordar que en $\mathbb{R}^p$ un conjunto es compacto $\Leftrightarrow$ es cerrado y acotado $\Longleftrightarrow$ toda sucesión en él posee una subsucesión convergente. Veamos que la imagen de K es compacto. Consideremos una sucesión en $f(K)$. Así, esta es de la forma $\{f(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, con cada $x_i \in K$. Ahora, $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en K que es compacto, luego existe una subsucesión convergente en K, i.e $\{x_{\sigma(i)}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset K, x_{\sigma(i)} \to x \in K$. Luego, por continuidad de f, $f(x_{\sigma(i)}) \to f(x) \in f(K)$, es decir la sucesión original posee una subsucesión $\{f(x_{\sigma(i)})\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergente en $f(K)$. Luego $f(K)$ es compacto.

Para ver qué sucede con los abiertos, consideremos la función constante $f(x) = c$. Así si U es abierto, f(U)=c, que es cerrado.

Ahora, si consideramos $f(x) = \arctan(x)$, y notamos que $\mathbb{R}$ es cerrado (y abierto en realidad), $f(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$,que es abierto.

iii. Sea $f : K \subset \mathbb{R}^n \to L \subseteq \mathbb{R}^m$ contínua y biyectiva con K un compacto. Por biyectividad, $(f^{-1})^{-1} = f$. Así, la pre-imagen de un conjunto por f^{-1} es la imagen de este por f. $f^{-1} : L \subset \mathbb{R}^m \to K \subseteq \mathbb{R}^n$. Sea V un cerrado en K (i.e., V=K$\cap M$, con M un cerrado de $\mathbb{R}^n$), como K es compacto necesariamente V es compacto. Así, $f(V)$ es compacto por ii. y luego es un cerrado en L. En definitiva, como $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$, la pre-imagen de un cerrado es cerrada para f^{-1} y por i. esto implica que f^{-1} es contínua.

2. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal.

i. Es evidente que a$\Rightarrow b$. Veamos que b$\Rightarrow a$. Sea $x_n \to x$ una sucesión. Luego, $x_n - x \to 0$. Así, como L es contínua en 0, $L(x_n - x) \to L(0) = 0$ y por linealidad esto equivale a que $L(x_n) - L(x) \to 0$ esto es, $L(x_n) \to L(x)$. Luego L es contínua en todo x de $\mathbb{R}^n$.

Veamos ahora que c$\Rightarrow a$. Como se tiene que $\forall x \; ||L(x)|| \leq M||x||$, esto es equivalente a que $\forall x, y \; ||L(x - y)|| \leq M||x - y||$ y por linealidad a que $||L(x) - L(y)|| \leq M||x - y||$, lo que implica que L es contínua (verificarlo, usar $\delta = \epsilon/M$).

Ahora, veamos que a$\Rightarrow$ c.Sea $x \in \mathbb{R}^n$. $x = x_1e^1 + ... + x_ne^n$ con $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica. Por linealidad, $L(x) = \sum_i x_iL(e^i)$ y luego por desigualdad triangular, $||L(x)||_2 \leq \sum ||L(e^i)|| * |x_i| \leq N\sum |x_i| = N||x||_1$, donde N=$\max_{i=1..n}\{||L(e^i)||\}$, $||y||_2$=$\sqrt[2]{y^ty}$, y $||(x_1,...,x_n)||_1 = \sum |x_i|$. Ahora bien, si definimos la función sgn(r)= 1 si r$\geq$ 0 y -1 si r<0 (el signo de r), y consideramos la desigualdad de Cauchy-Schwartz, queda que $||(x_1,...,x_n)||_1 = \sum |x_i| = (x_1,..,x_n)*(\text{sgn}(x_i),..,\text{sgn}(x_n)) \leq ||x||_2||(sgn(x_i),..,sgn(x_n))||_2 = \sqrt[2]{n}||x||_2$.Así, $||L(x)||_2 \leq N\sqrt[2]{n}||x||_2 = M||x||_2$, con M$\geq$ 0.

El M de la parte c, está acotado inferiormente por el supremo sobre $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ de $\frac{||L(x)||}{||x||}$, pues el supremo es la menor de las cotas inferiores.

ii. Ahora, veamos que $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal, implica que L es contínua. Para esto, basta ver que es contínua en 0. Sea $x_n \to 0$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Así, descomponiendo en la base canónica, $x_k = x_k^{(1)}e^1 + ... + x_k^{(n)}e^n$ y por propiedad se tiene que $\forall i = 1...n$, $x_k^{(i)} \underrightarrow{k \to \infty} 0$. Así por Linealidad, $L(x_k) = x_k^{(1)}L(e^1) + ... + x_k^{(n)}L(e^n)$, y como cada $L(e^i)$ es constante y cada término $x_k^{(i)}$ tiende a cero, L(x_k)$\to 0 = L(0)$. Luego es contínua.

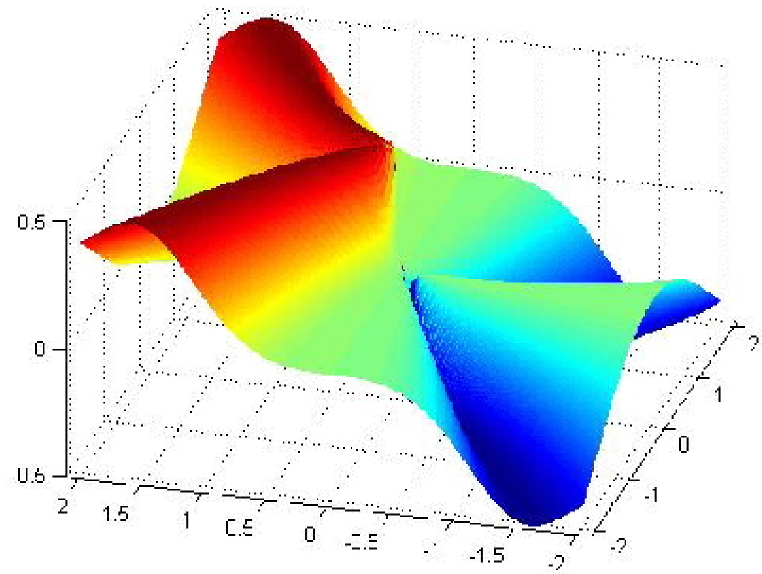
iii. Ahora sabemos que L es contínua. Por lo tanto Ker(L)=$L^{-1}(\{0\})$ es cerrado, pues $\{0\}$ es cerrado. Veamos las implicancias:

($\Leftarrow$) Sabemos que $\exists N > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, ||L(x)|| \geq N||x||$. Así, si x$\neq$ 0, $||x|| \neq 0$ y como N>0, ||L(x)||>0, esto es, L(x)$\neq$ 0. Así, Ker(L)={0} y por lo tanto L es inyectiva.

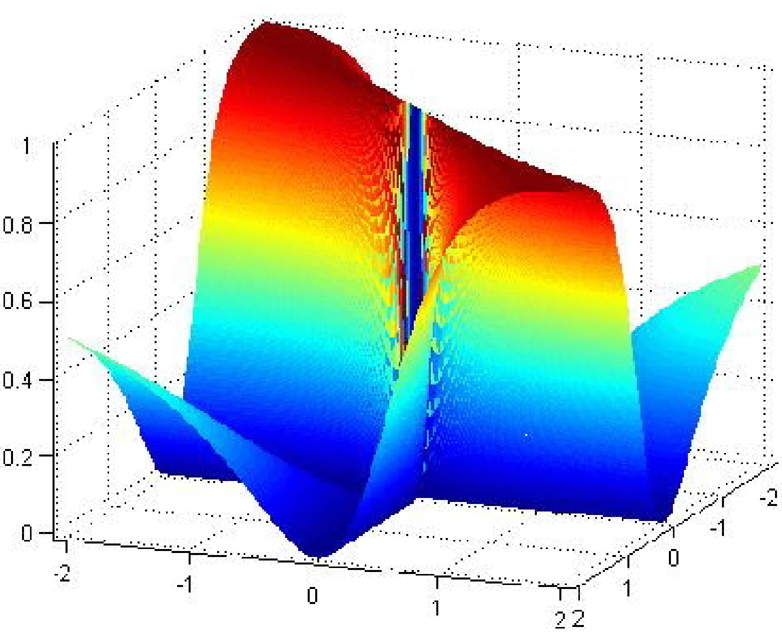
($\Rightarrow$)Ahora sabemos que L es inyectiva.Si $x \neq 0$, $\frac{||L(x)||}{||x||} \geq \inf_{y\neq 0}\{\frac{||L(y)||}{||y||}\} = N$. Esto es, $||L(x)|| \geq N||x||$ si x$\neq$ 0. Obviamente, si x=0 esto también es cierto pues ||0||=||L(0)||=0. La existencia de N se justifica pues se toma el ínfimo sobre un conjunto no vacío y acotado inferiormente (por 0). Así, solo falta ver que N>0 (hasta ahora es solo $\geq$ 0). Por contradicción, supongamos que N=0. Así por propiedad del ínfimo, existe una sucesión x_n, todos no nulos (pues el ínfimo se toma sobre $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$) tal que $\frac{||L(x_n)||}{||x_n||} \to \inf_{y\neq 0}\{\frac{||L(y)||}{||y||}\} = 0$. Notemos que por propiedad de la norma y la linealidad de L, $\frac{||L(x_n)||}{||x_n||} = ||L(\frac{x_n}{||x_n||})||$ y además, $||\frac{x_n}{||x_n||}||$=1, así, existe una sucesión $y_n = \frac{x_n}{||x_n||}$ tal que ||L(y_n)||$\to$ 0 y ||y_n||=1 para todo n. Así, $\{y_n\}_n \subset adh(B(0,2))$, que es compacto y luego existe una subsucesión $\{y_{\sigma(n)}\}$convergente a un y, que por continuidad de la norma, es de norma 1 (i.e., ||$y_{\sigma(n)}$||=1$\to$ $||y||$). Además ||L(y_n)||$\to 0 \Rightarrow$ ||L($y_{\sigma(n)}$)||$\to$ 0 y por continuidad de L, ||L($y_{\sigma(n)}$)||$\to$ $||L(y)||$, y por unicidad del límite, ||L(y)||=0 con y$\neq$ $0, pues$ $||y|| = 1$. Esto completa la contradicción, pues la hipótesis es que L era inyectiva.

3.

a) $f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^4+y^6}$ si (x,y)$\neq$ $(0,0)$. Consideremos la sucesión $x_n = \frac{1}{\sqrt[2]{n}}$ e $y_n = y_n\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Así ($x_n, y_n$)$\to$ $(0,0)$. En cambio, $f(x_n, y_n) = \frac{1/n^2}{1/n^2+1/n^2} = 1/2 \to 1/2$. Considerando ahora una ponderación de x_n, por ejemplo, $2x_n$, se obtiene así otro resultado para el límite $(f(\frac{2}{\sqrt[2]{n}}, \frac{1}{\sqrt[3]{n}}) \to \frac{4}{17})$, es decir, no existe el límite de f en (0,0) y por lo tanto no puede ser contínua ahí. En todo el resto de los puntos sí es contínua.



b) $f(x,y) = \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2}$ si (x,y)$\neq (0,0)$. Consideremos la recta y=x. Así $f(x,x) = \frac{x^4}{x^4+0} =$ 1 si x$\neq$ 0. El límite de f a través de esta recta vale 1. Si consideramos ahora la sucesión (0,1/n), notamos que $f(0,1/n) = 0, \forall n > 0$. Así, el lími te de f por esta sucesión es 0. Como tenemos dos valores distintos, no existe el límite de f en (0,0) y luego no puede ser contínua en (0,0). Notemos además que f se indetermina ssi (xy)=0 $\wedge$ (x-y)=0, cuya única solución es x=y=0. Así f es contínua en todas partes menos en (0,0)



Nota: fijarse que la discontinuidad en varias variables se "ve distinto" que en una variable. En nuestros casos, cerca de cero aparecen como "paredes verticales".

4. Sea $f(x,y) = \frac{x|y|^\alpha}{x^4+y^4+x^2}$ si (x,y)$\neq (0,0)$ y 0 de lo contrario. Es claramente contínua si

(x,y)$\neq (0,0)$.Veamos qué sucede en (0,0).

$|f(x,y)|$=$\frac{|x||y|^{\alpha}}{|x^4+y^4+x^2|} = \frac{|x||y|^{\alpha}}{x^4+y^4+x^2} = \frac{|x||y|^{\alpha}}{x^4+y^4+2x^2y^2+x^2-2x^2y^2} = \frac{|x||y|^{\alpha}}{(x^2+y^2)^2+x^2(1-2y^2)}$. Así como $(x,y) \to (0,0)$ entonces $y \to 0$ y luego sin perder generalidad podemos suponer que |y|<$\frac{1}{\sqrt[2]{2}}$ (pues y se hace tan pequeño como uno desee) y luego $1-2y^2 > 0$ y así $x^2(1-2y^2) > 0$ y por lo tanto $(x^2+y^2)^2 + x^2(1-2y^2) > (x^2+y^2)^2$ y con ello $|f(x,y)|$<$\frac{|x||y|^{\alpha}}{(x^2+y^2)^2}$. Ahora, haciendo un cambio a coordenadas polares ($\rho = \sqrt[2]{x^2+y^2}$ y $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$), x e y se escriben como $x = \rho\cos(\theta)$ y $y = \rho\sin(\theta)$ y como $(x,y) \to (0,0)$ $\Rightarrow \rho \to 0$. Con todo lo anterior, $|f(x,y)|$<$\frac{|x||y|^{\alpha}}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{\rho^{1+\alpha}|\cos(\theta)||\sin(\theta)|^{\alpha}}{(\rho^2)^2} \leq \rho^{1+\alpha-4} = \rho^{\alpha-3}$. Así, si $\alpha - 3 > 0$, ie, $\alpha > 3$, entonces $\rho^{\alpha-3} \to 0$ y por "Sandwich", $|f(x,y)|$$\to 0$. Como esto es para todo par (x,y) que tienda a cero, se tiene entonces que f es contínua en (0,0) (recorder que $f(0,0) = 0$ por definición).

Ahora bien, notemos que sobre la curva (y^2,y), $y \to 0$, $f(y^2,y) = \frac{y^{2+\alpha}}{y^8+y^4+y^4} = \frac{1}{y^{6-\alpha}+2y^{2-\alpha}}$ y de esto se deduce que si $\alpha \leq 2$, al hacer tender y a cero, f no se va a 0 y por lo tanto no es contínua en (0,0).

Así en resumen, si $\alpha > 3$, f es contínua en (0,0), y si $\alpha \leq 2$ f no es contínua en este punto.

Se deja como ejercicio propuesto (difícil) ver qué sucede para $\alpha \in (2,3]$, a quienes tengan el tiempo para meditarlo más....Pueden graficar la función como ayuda.