Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Sábado 30 de junio del 2007

Examen-MA22A: Cálculo en Varias Variables.

Profesor: Rafael Correa
Profesores Auxiliares: Omar Larré, Tomas Spencer, Andrés Fielbaum

Instrucciones: Usted debe responder obligatoriamente las preguntas 1, 2 y 3. Además, debe elegir entre las preguntas 4 y 5, y responder solamente una de ellas.

1. Sea A una matriz de $n \times n$ simétrica. Considere el siguiente problema de maximizacion:

$$\begin{aligned} &Max\ \overrightarrow{x}^t A \overrightarrow{x} \\ &s.a.\ ||\overrightarrow{x}||_2 = 1 \\ &\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

   (a) Justifique por qué el máximo se alcanza.
   Hint: Defina bien la funcion a la cual se le esta calculando el máximo y considere su dominio.

   (b) Demuestre utilizando multiplicadores de Lagrange, que el valor máximo de la función objetivo es el mayor valor propio de A.
   Hint: $||\overrightarrow{x}||_2 = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{x}^t \overrightarrow{x} = 1$. Además recuerde que λ es valor propio de A ssi $\exists \overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\overrightarrow{x}_0 = \lambda \overrightarrow{x}_0$.

   (c) Considere ahora la descompocicion de $A : A = P^t D P$, con P invertible y D una matriz diagonal que contiene a los valores propios de A en su diagonal. Pruebe que el $\overrightarrow{x}$ con el que se alcanza el máximo es tal que $P\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e}_i$ (con $\overrightarrow{e}_i$ el vector canónico i) y tal que el maximo valor propio de A este en la posicion i, i de la matriz D (i.e. $D_{i,i} = \lambda_{\max}$).

2. Considere el cambio de variables a coordenadas elipsodiales:

$$T(r, \theta) = (x, y) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$$

   Las que son útiles para trabajar con una elipse de semi-ejes de medida a, b en los ejes x, y respectivamente.

   (a) Encuentre $|\det J(r, \theta)|$ donde $J(r, \theta)$ es el Jacobiano que representa a este cambio de variables.

   (b) Demuestre, usando integrales múltiples y estas coordenadas, que el área de una elipse de semi-ejes a y b es πab.
   Hint: Para encontrar el límite superior de integración para r, le puede ser útil ver cuánto debiera valer r en los vértices de la elipse.

3. Considere el sólido dado por:

$$\begin{aligned} V = \quad &\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} \cup \\ &\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0\} \end{aligned}$$

   Se define la densidad de carga superficial $\rho(x, y, z)$ como la cantidad de carga por unidad de volumen de este sólido. Suponga que

$$\rho(x,y,z) = K\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

   con K una constante conocida y positiva. Calcule la carga total contenida en el sólido, es decir, calcule

$$\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dxdydz$$

4. Considere el problema:

$$(P)\begin{cases} \min & -2x-6y+x^2-2xy+2y^2+2z^2 \\ s.a. & x+y\leq 2 \\ & -x+2y\leq 2 \\ & z\leq 3 \end{cases}$$

Use el teorema de Karush-Kuhn-Tucker para determinar si

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}_0 &= \left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},1\right) \\ \overrightarrow{x}_1 &= \left(\frac{4}{5},\frac{6}{5},0\right) \end{aligned}$$

son soluciones de (P).

5. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f=f(u,v)$, una función de clase C^2 y armónica en $\mathbb{R}^2$, es decir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v)=0 \quad ,\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

Sea $g(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$. Demuestre que $f\circ g$ también es armónica en $\mathbb{R}^2$.

Tiempo: 3 horas.