# PAUTA CONTROL 2 PREGUNTA 1

i) Sea $n \in \mathbb{N}$. Como sabemos que $g_n \in \mathcal{A}(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{F})$ $\exists \quad \delta > 0$ t.q.$g_n(x) < \delta$ $\forall x \in \overrightarrow{E} \Rightarrow g_n(\overrightarrow{E})$ es un conjunto acotado $\Rightarrow \overline{g_n(\overrightarrow{E})}$ es un conjunto acotado. Además $\overline{g_n(\overrightarrow{E})}$es un conjunto cerrado (pues la adherencia de todo conjunto es cerrado), y como $\overrightarrow{F}$ es de dimensión finita, se tiene que $\overline{g_n(\overrightarrow{E})}$es un conjunto compacto. Luego, $f$ toma valores en un conjunto compacto, y como es continua, y la función $||\cdot||$ también es continua, se cumple entonces que $\exists\ \varphi \geqslant 0$ tq $f(z) \leq \varphi\ \forall\ z \in \overline{g_n(\overrightarrow{E})} \Rightarrow f(z) \leq \varphi\ \forall\ z \in g_n(\overrightarrow{E}) \Rightarrow (f \circ g_n) \in \mathcal{A}(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{G})$.

Sea $\varepsilon > 0$. PDQ: $\exists\ n^* \in \mathbb{N}$ tq $||f(g_n(x)) - (f(g(x))|| < \varepsilon\ \forall\ x \in \overrightarrow{E}, \forall\ n \geq n^*$. En efecto:

$f$ es uniformemente continua $\Rightarrow \exists\ \delta > 0$ tq $\forall\ u, v \in \overrightarrow{F},\ ||u - v|| < \delta \Rightarrow ||f(u) - f(v)|| < \varepsilon$. Pero $g_n$ converge uniformemente a $g \Rightarrow \exists\ n^*$ tq $||g_n(x) - g(x)|| < \delta\ \forall\ x \in \overrightarrow{E}, n \geq n^*$.Así, tomando en la definición de continuidad uniforme de $f$, $u = g_n(x)$ y $v = g(x)$, se cumple que $\forall\ n \geq n^*, \forall x \in \overrightarrow{E}, ||g_n(x) - g(x)|| < \delta \Rightarrow ||f(g_n(x)) - (f(g(x))|| < \varepsilon$. Que es lo que queríamos demostrar.

ii) a) Sean $g, h \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.$|T(g) - T(h)| = |\int_0^1 f(t)g(t)dt - \int_0^1 f(t)h(t)dt| = |\int_0^1 f(t)[g(t) - h(t)] \leq \int_0^1 |f(t)| \cdot (|g - h(t)|)dt \leq ||g - h||_\infty \cdot \int_0^1 |f(t)|dt$ (por definición de $||\quad||_\infty$)$\Rightarrow T$ es Lipschitzeana $\Rightarrow T$ es continua.

b) Sea $p_k$ sucesión de polinomios convergente a $f$ (que sabemos que existe por el teo. de Weirstrass). Sea $p_k = \sum_{n=0}^{m_k} a_n x^n$. Así, $T(p_k) = \int_0^1 f(x) \sum_{n=0}^{m_k} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{m_k} a_n \int_0^1 f(x) x^n dx = 0$ (por hipótesis). Pero como $T$ es continua, $0 = \lim_{k\to\infty} T(p_k) = T(\lim_{k\to\infty} p_k) = T(f)$. Es decir, tenemos que $T(f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x)dx = 0 \Rightarrow$
$\sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx} = 0 \Rightarrow ||\ f\ ||_2 = 0 \Rightarrow f = 0$.

iii) Sea $f$ una función continua en $[0,1]$ no diferenciable. Por Weirstrass, $\exists\ q_k$ sucesión de polinomios convergente uniformemente a $f$. Sabemos que todos los polinomios son $\mathcal{C}^{\infty}$, i.e., tenemos una sucesión de funciones $\mathcal{C}^{\infty}$convergente uniformemente a $f$ no diferenciable, que es lo que queríamos encontrar.