Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática.

MA22A: Cálculo en Varias Variables, Trabajo dirigido 1, año 2007

Profesor: Rafael Correa Auxiliares: Omar Larré, Tomas Spencer, Andrés Fielbaum

1. Sea $\overrightarrow{E} = C^0([0,1],\mathbb{R}) = \{\ f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ es continua en } [0,1]\}$ espacio vectorial normado, con la norma:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Muestre que el conjunto $A_r = \{f \in \overrightarrow{E} \mid \forall x \in [0,1],\ \ f(x) < r\}$, con $r \in \mathbb{R}_+$, es abierto.

2. Sea $\overrightarrow{E}$ un espacio vectorial.

Definición: Se dice que $A \subseteq \overrightarrow{E}$ es un conjunto convexo si para cada par de puntos $x, y \in A$ y todo escalar $\lambda \in [0,1]$ se cumple que $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ (o de forma equivalente, $\forall \lambda, \mu \geq 0$ tal que $\lambda + \mu = 1$, $\lambda x + \mu y \in A$).

   (a) Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\overrightarrow{E}$. Muestre que el conjunto $\overline{B}(0,1) = \{x \in \overrightarrow{E} \mid \|x\| \leq 1\}$ es un conjunto convexo.

   (b) Sea $\rho : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ una función que verifica:

      i. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

      ii. $\forall x \in \overrightarrow{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \rho(\lambda x) = |\lambda|\,\rho(x)$

   Demuestre que :

$$C := \{x \in \overrightarrow{E} : \rho(x) \leq 1\} \text{ es convexo } \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\cdot) \text{ es una norma en } \overrightarrow{E}.$$

   Hint: Para la implicancia hacia la izquierda, para cualquier $x, y \in \overrightarrow{E}\backslash\{0\}$ considere el punto $z := \frac{1}{\rho(x)+\rho(y)}\,(x+y)$ y demuestre que existen escalares $\lambda, \mu \geq 0$, tal que $\lambda + \mu = 1$ y tal que

$$z = \lambda \frac{x}{\rho(x)} + \mu \frac{y}{\rho(y)}$$

   y note que $\frac{x}{\rho(x)} \in C$, $\frac{y}{\rho(y)} \in C$.

3. Dado $p > 0$ se define en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ la "norma":

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|\,, \qquad \text{donde } x = (x_1, ..., x_n).$$

   (a) Considere n=2 y haga un bosquejo de la bola unidad $B_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p \leq 1\}$ para $p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, \infty$.

   (b) Muestre que para $0 < p < 1$, $\|\cdot\|_p$ no es una norma. Para demostrar esto considere los puntos $x = (1, 0, 0, ..., 0)$, $y = (0, 1, 0, ..., 0)$ y muestre que $\|x+y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p$. (Esto también se puede notar en un dibujo, cuando n=2, y p=1/2, verificando que $B_{1/2}$ no es un conjunto convexo, y asi contradice P2(a)).

   (c) Muestre que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$. Para esto primero demuestre que $\|x\|_\infty^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n\,\|x\|_\infty^p$.

   (d) Muestre que para $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ si es una norma. Para demostrar la desigualdad triangular:

      i. Verifique que la función $t \longmapsto t^p$ definida en $(0,\infty)$ es convexa (Hint: derive). Luego, de la definición de convexidad (vista en el curso de cálculo) resulta que $\forall a, b \in (0,\infty)$, $\forall \lambda, \mu \geq 0$ tal que $\lambda + \mu = 1$, se tiene que:

$$(\lambda a + \mu b)^p \leq \lambda a^p + \mu b^p$$

      ii. Con lo anterior muestre que $\forall \lambda, \mu \geq 0$ tal que $\lambda + \mu = 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n |\lambda x_i + \mu y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n (\lambda\,|x_i| + \mu\,|y_i|)^p \leq \sum_{i=1}^n (\lambda\,|x_i|^p + \mu\,|y_i|^p)$$

      y concluya que $\|\lambda x + \mu y\|_p^p \leq \lambda\,\|x\|_p^p + \mu\,\|y\|_p^p$.

      iii. Considere $x, y \in B_p$ y muestre que entonces $\|\lambda x + \mu y\|_p \leq 1$. De aquí concluya que la bola unidad B_p es convexa y utilizando el problema 2 concluya.