

Auxiliar N° 4: MA 12B Calculo I

Profesor: Raúl Uribe

Auxiliares: Mauricio Quezada - Cristóbal Quiñinao

19 de marzo de 2007

1. **Proposición:** Sea f una función real de variable real, definida en una vecindad U^* de un punto $a \in \mathbb{R}$ se dice que f tiene límite $l \in \mathbb{R}$ en el punto a y se escribe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ si se verifica cualquiera de las siguientes propiedades:

- (a) (Definición de Cauchy) Para cada número real $\epsilon > 0$ existe otro real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ para todos los $x \in U^*$ que verifican $0 < |x - a| < \delta$; es decir

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tq } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

- (b) (Definición de Heine) Para cualquier sucesión $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de puntos de U^* que tenga límite a , se verifica que la sucesión $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ tiene límite l

Demostración:

- $(\Rightarrow)$ Suponemos que la condición (a) es verdadera y tomemos una sucesión $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de puntos en U^* que tiene límite a . Luego dado un $\epsilon > 0$ debemos probar que existe un n_0 tal que $\forall n > n_0$ se tiene que $|f(x_n) - l| < \epsilon$. Como la parte (a) asegura la existencia de un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$ y la sucesión de x_i converge a a se tiene que existe un n_0 tal que $(\forall n > n_0) |x_n - a| < \delta$ así resumiendo:

$$(\forall n > n_0) \Rightarrow |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - l| < \epsilon$$

que era lo que queríamos probar.

- $(\Leftarrow)$ En este caso nos será más fácil probar la contrarrecíproca, esto es, $\neg(a) \Rightarrow \neg(b)$. Debemos suponer que $(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \delta > 0)[|x - a| < \delta \wedge |f(x) - l| \geq \epsilon_0]$ y tenemos que probar que existe una sucesión $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de puntos de U^* que tenga límite a y tal que $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ no converge a l . Tomemos un delta de la forma $1/n$ necesariamente existe un x tal que $|x - a| < 1/n$ el cual llamaremos x_n así se tiene que:

$$|x_n - a| < 1/n \wedge |f(x) - l| \geq \epsilon_0$$

lo cual es equivalente a decir que la sucesión $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ no converge a l , así hemos concluido la demostración.

2. Sea f una función real de variable real, definida en al menos una vecindad U^* del origen. Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, pruebe que la función $F: V \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{x^2 f(x)}{(f(x)-1)(x^2+f(x)^2)}$$

tiene límite nulo cuando $x \rightarrow 0$

Solución:

Notemos el siguiente detalle: como $f(x)$ tiende a cero, por la definición de Cauchy de límite de funciones se cumple

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$$

tomando un $\epsilon = 1/2$ se tendrá que $|x| < 1/2 \Rightarrow |f(x)| < 1/2$ lo cual equivale a decir que $|f(x) - 1| > 1/2$.

También se cumple que $|x^2 + f(x)^2| > |x^2 + 0|$, pues todos los términos involucrados son no negativos. Así, juntando todo lo anterior, se tiene

$$\left| \frac{x^2 f(x)}{(f(x)-1)(x^2+f(x)^2)} \right| = \frac{|x^2| |f(x)|}{|f(x)-1| |x^2+f(x)^2|} \leq \frac{|x^2| |f(x)|}{1/2 |x^2+0|} \leq 2|f(x)|$$

luego acotamos la expresión por $-2|f(x)| \leq |F(x)| \leq 2|f(x)|$ y como $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$, resulta que tanto $-2|f(x)|$ como $2|f(x)|$ se van a cero y se deduce lo pedido.

3. Sean $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ conjuntos finitos disjuntos dos a dos; sea $C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$, es decir la unión de los conjuntos antes mencionados. Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = 0, \text{ si } x \notin C; f(x) = 1/i, \text{ si } x \in C_i$$

pruebe que f tiene límite cero en todo punto $a \in \mathbb{R} \cap C^c$

Solución:

Sea a un número que pertenece a $\mathbb{R} \cap C^c$, sea $\epsilon > 0$ luego tomemos n_0 tal que $n_0 > 1/\epsilon$ el cual es finito. Consideremos $\delta = \min\{dist(a, C_1), dist(a, C_2), \dots, dist(a, C_{n_0})\} \neq 0$ luego si $|x - a| < \delta$ tenemos las siguientes situaciones:

- $(\forall n > n_0)(x \notin C_n)$: en este caso $f(x) = 0$ y así $|f(x) - 0| < \epsilon$
- $(\exists n > n_0)(x \in C_n)$: ahora notando que $|f(x) - 0| = |f(x)| = 1/n < 1/n_0 < \epsilon$

resumiendo $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$, que era lo que había que mostrar

Definición: Decimos que una función f es continua en el punto $a \in dom(f)$ si se cumple que $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Como antes, esta es la caracterización de Cauchy para continuidad, que es equivalente a la de Heine la cual dice: f es continua en el punto $a \in dom(f)$ si para cualquier sucesión $\{a_n\}$ que converge a a se tiene que la sucesión $\{f(a_n)\}$ converge a $f(a)$

4. Estudiar la continuidad de

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{2n} \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})}{x^{2n} + 1}$$

Solución:

Hagamos el análisis según los posibles valores de x

- Si $|x| < 1$ se tiene $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{2n} \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})}{x^{2n} + 1} = x^2$
- Si $|x| > 1$ se tiene $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{2n} \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})}{x^{2n} + 1} = \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})$
- Si $x = 1$ entonces $f(1) = 1$
- Si $x = -1$ entonces existe una discontinuidad pues $f(-1^+) = 1$ mientras que $f(-1^-) = -1$

Concluimos que f es continua en el conjunto de puntos $\mathbb{R} - \{-1\}$

5. Estudiar la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$; $f(x) = \frac{p}{q+1}$, si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (forma irreducible) en los aspectos de continuidad

Solución:

De la función podemos decir a priori que no puede ser continua, pues basta tomar una sucesión de irracionales que tiendan a cualquier racional en el intervalo $[0, 1]$. Por ejemplo la sucesión de puntos $\{1/2 + \pi/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es claro que tiende a $1/2$ pero se cumple que $\{f(1/2 + \pi/n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión nula, luego tiende a $0 \neq 1/3 = f(1/2)$