# Auxiliar N$^o$ 2: MA 12B Calculo I

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliares: Mauricio Quezada - Cristóbal Quiñinao

12 de marzo de 2007

1. Demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ definida por la recurrencia $a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}+b}{2}$, $a_0 = a_1 = 1$ es divergente si $b \geq 1$

   **Solución:** Supongamos que existe el límite de la sucesión. Sea $L$ este límite luego se tiene que:

   $$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} a_{n-1} = lim_{n\to\infty} a_{n-2} = L$$

   de este modo, en el límite la recurrencia se reduce a la ecuación

   $$L = \tfrac{L\cdot L+b}{2}$$

   resolviendo la ecuación anterior se concluye que si el límite existe debe tener la forma

   $$L = 1 \pm \sqrt{1-b}$$

   ahora si $b$ es mayor que $1 \Rightarrow L \notin \mathbb{R}$ pues $1 - b < 0$ y así la sucesión diverge

2. Calcular los siguientes límites

   (a) $lim_{n\to\infty} n(1 - (1 - a/n)^{1/3})$
   (b) $lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
   (c) $lim_{n\to\infty} (\frac{n^2+2n-3}{n^2-5n+4})^n$
   (d) $lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} \cdot cos(n^2\pi)$

   **Solución:**

   (a) Recordando del colegio la factorización de la diferencia de cubos $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^3)$ se tiene

   $$lim_{n\to\infty} n(1 - (1 - a/n)^{1/3}) \cdot \tfrac{1+(1-a/n)^{1/3}+(1-a/n)^{2/3}}{1+(1-a/n)^{1/3}+(1-a/n)^{2/3}} = lim_{n\to\infty} \tfrac{n(1-1+a/n)}{1+(1-a/n)^{1/3}+(1-a/n)^{2/3}}$$

   lo cual equivale a escribir

   $$lim_{n\to\infty} n(1 - (1 - a/n)^{1/3}) = lim_{n\to\infty} \tfrac{a}{1+(1-a/n)^{1/3}+(1-a/n)^{2/3}} = \tfrac{a}{3}$$

   (b) Multiplicamos la expresión por $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ y así

   $$lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \tfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = lim_{n\to\infty} \tfrac{\sqrt{n}(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

   lo cual es lo mismo que

   $$lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} = \tfrac{1}{2}$$

   (c) Como $n^2 + 2n - 3 = (n+3)(n-1)$ y $n^2 - 5n + 4 = (n-4)(n-1)$ luego la expresión queda

   $$lim_{n\to\infty} (\tfrac{n^2+2n-3}{n^2-5n+4})^n = lim_{n\to\infty} (\tfrac{n+3}{n-4})^n = lim_{n\to\infty} (\tfrac{\frac{n+3}{n}}{\frac{n-4}{n}})^n$$

   recordando que $lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ sigue que

   $$lim_{n\to\infty} (\tfrac{n^2+2n-3}{n^2-5n+4})^n = lim_{n\to\infty} (\tfrac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{-4}{n}})^n = \tfrac{e^3}{e^{-4}} = e^7$$

(d) Recordando que el recorrido de la función coseno es $[-1, 1]$ se deduce que la sucesión $u_n = cos(n^2\pi)$ es acotada, como además la otra sucesión $v_n = \frac{n^2}{n^3+1}$ es convergente a cero por un resultado estudiado en cátedras se deduce que $\frac{n^2}{n^3+1} \cdot cos(n^2\pi) \to 0$ cuando $n \to \infty$

3. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales que diverge a $+\infty$ pruebe las siguientes propiedades

   (a) Pruebe en estas condiciones la sucesión $\{\frac{1}{a_n}\}$ converge a cero y muestre que la recíproca no es válida

   (b) Pruebe que si $b_n \to l > 0$ entonces $a_n b_n \to +\infty$

   (c) (Propuesto) Muestre con ejemplos que si $b_n \to 0$, pueden tenerse los casos $a_n b_n \to 0$, $a_n b_n \to +\infty$ y $a_n b_n \to l \neq 0$

   **Solución:**
   Lo primero que debemos saber es que si una sucesión $\{a_n\}$ tiende a $+\infty$ entonces cumple que $(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq 0)a_n \geq M$ luego

   (a) Sea $\epsilon > 0$ por propiedad arquimediana de los reales existe un $M > 0$ tal que $\epsilon = \frac{1}{M}$ usando este $M$ en la definición anterior se tiene que $(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq 0)a_n \geq M$ además $M > 0 \Rightarrow (\forall n \geq n_0)a_n > 0 \Rightarrow a_n = |a_n|$ reescribiendo todo $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq 0)|a_n| \geq \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow |\frac{1}{a_n}| < \epsilon$ lo cual equivale a decir que $\{\frac{1}{a_n}\}$ converge a cero.
   Para mostrar que la recíproca no es válida basta tomar la sucesión definida por $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ la cual claramente converge a cero pero $(-n)^n$ no diverge a $+\infty$

   (b) Usando el hecho que $b_n$ es una sucesión covergente a $l > 0$ tomando un epsilon igual a $\frac{l}{2} > 0$ se cumple que $(\exists n_0^{(1)} \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0^{(1)})|b_n - l| < \frac{l}{2}$ de donde se deduce que $(\forall n \geq n_0^{(1)})b_n > \frac{l}{2}$.
   Ahora sea $M > 1$ no es difícil convencerse que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{l}{2} > \frac{1}{M^k}$.
   Finalmente usando el hecho que $a_n \to +\infty$ se tiene que $(\exists n_0^{(2)} \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0^{(2)})a_n \geq M^{k+1}$, asi, definiendo $n_0 = max\{n_0^{(1)}, n_0^{(2)}\}$

   $$(\forall M > 1)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)a_n \geq M^{k+1} \wedge b_n \geq \frac{1}{M^k}$$

   lo cual implica que

   $$(\forall M > 1)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)a_n b_n \geq M$$

   es decir, la sucesión $a_n b_n$ diverge a $+\infty$ (En la definición de divergencia al infinito se requiere la conclusión $\forall M > 0$, el caso $M \in (0, 1)$ se los dejo propuesto pues no reviste mayor complejidad.)

4. (Propuesto) Se define la sucesión $u_n$ mediante la recurrencia: $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2-u_n}{1+2u_n}$

   (a) Demostrar que si $0 \leq u \leq 2$ entonces $0 \leq u + \frac{2-u}{1+2u} \leq 2$

   (b) Deducir que $\{u_n\}$ es acotada

   (c) Demostrar que $\{u_n\}$ es creciente

   (d) Deducir que $\{u_n\}$ es convergente y calcular su límite