Auxiliar N^o 1: MA 12B Calculo I

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliares: Mauricio Quezada - Cristóbal Quiñinao

9 de marzo de 2007

1. Sea s_n una sucesión. Pruebe que s_n converge a un límite l ssi la sucesión $s_n - l$ converge a cero

   Solución:
   ($\Rightarrow$) Supongamos que s_n converge a l, luego por definición de convergencia:

   $$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |s_n - l| < \epsilon$$

   lo cual equivale a escribir:

   $$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, |(s_n - l) - 0| < \epsilon$$

   ie, por definición de limite de una sucesión, $s_n - l \to 0$
   ($\Leftarrow$) identico

2. Calcule el límite de las siguientes sucesiones:

   (a) $s_n = \sin(n! x\pi)$ para $x \in \mathbb{Q}$ fijo
   (b) $s_n = n(|x + \frac{1}{n}| - |x|)$ con $x \in \mathbb{R}$ fijo
   (c) $s_n = \frac{n!}{n^n}$

   Solución:

   (a) Si $x \in \mathbb{Q}$ entonces existen $p \wedge q \in \mathbb{Z}$ primos relativos tales que $x = \frac{p}{q}$. Ahora como $n \to \infty$ en algún instante tomará valores mayores a q y de esta forma el límite se reduce a $lim_{n\to\infty} \sin(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot q \cdot (q+1) \cdot \ldots \cdot n\frac{p}{q}\pi)$ con el cambio de índice $k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (q-1) \cdot (q+1) \cdot \ldots \cdot n \in \mathbb{Z}$ se reescribe el límite como $lim_{k\to\infty} \sin(k\pi)$ y se deduce que es nulo, ie, $lim_{n\to\infty} s_n = 0$

   (b) En este caso se debe calcular el límite por casos
   - Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$ y $|x + \frac{1}{n}| > 0 \Rightarrow |x + \frac{1}{n}| = x + \frac{1}{n}$ luego el límite queda:
     $$lim_{n\to\infty} n(|x + \tfrac{1}{n}| - |x|) = lim_{n\to\infty} n(x + \tfrac{1}{n} - x) = lim_{n\to\infty} n\tfrac{1}{n} = 1$$
   - Si $x < 0$ ahora $|x| = -x$ y a partir de n suficientemente grande se tiene que $|x + \frac{1}{n}| < 0 \Rightarrow |x + \frac{1}{n}| = -x - \frac{1}{n}$ así:
     $$lim_{n\to\infty} n(|x + \tfrac{1}{n}| - |x|) = lim_{n\to\infty} n(-x - \tfrac{1}{n} + x) = lim_{n\to\infty} - n\tfrac{1}{n} = -1$$

   (c) Notemos que la siguiente desigualdad es válida:
   $$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1}{n}$$
   esto pues $\frac{2}{n} \leq 1$, $\frac{3}{n} \leq 1$, ..., $\frac{n}{n} \leq 1$ luego,
   $$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$
   del teorema del sandwich se concluye que el límite es cero

   También el resultado puede ser deducido de la fórmula de Stirling $n! \sim n^{n-1/2}\sqrt{2\pi}e^{-n}$ para n grande o, más informalmente, probando por inducción que $n^n \geq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ (o si no $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$)