"PAUTA" Examen Álgebra 07-1. Por Guido Lagos.

↳ Una forma de resolver el examen.

P1 (a) • caso base: si $n=1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 < 2 = 2\sqrt{n}$ ✓

• Paso inductivo: supongamos $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$. PDQ $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n+1}$

como: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n}$

entonces bastaría demostrar que $\forall n \geq 1$ $\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$

Equivalentemente, bastaría demostrar que $1 + 2\sqrt{n(n+1)} \leq 2(n+1)$ $\forall n \geq 1$.

Demostrémoslo "como en cálculo", porque por inducción sale un poco engorroso:

Sea $x \geq 0$. Entonces:

$0 \leq 1 \iff 4x^2 + 4x \leq 4x^2 + 4x + 1 \iff 4 \cdot x(x+1) \leq (2x+1)^2$

$\iff 2\sqrt{x(x+1)} \leq 2x+1 = 2x+2-1 = 2(x+1)-1$ (pues $4x(x+1) \geq 0$)

$\iff 1 + 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1} \leq 2(\sqrt{x+1})^2 \iff \frac{1}{\sqrt{x+1}} + 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{x+1}$

pues $\sqrt{x+1} \geq 1$

Entonces tenemos que $\forall x \geq 0$ $\frac{1}{\sqrt{x+1}} + 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{x+1}$,

y luego en particular: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$

Con esto, tenemos que: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$

y entonces $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n+1}$.

(b) (1) sean $f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectivas, cualesquiera.

Como: $\Psi(f,g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

y también: f,g biyectivas en $\mathbb{R} \iff f^{-1}, g^{-1}$ biyectivas $\Rightarrow g^{-1} \circ f^{-1}$ biyectiva

entonces $\Psi(f,g) = g^{-1} \circ f^{-1}$ es fn. de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ biyectiva.

Así $\Psi(f,g) \in \mathcal{F}$ $\forall f,g \in \mathcal{F}$.

(2) • Ψ epiyectiva:

Sea $f \in \mathcal{F}$, ie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva. PDQ $\exists g,h \in \mathcal{F}$ tq $\Psi(g,h) = f$

Como $id_{\mathbb{R}}$, $f^{-1} \in \mathcal{F}$ (pues: f biyectiva $\Rightarrow f^{-1}$ biyectiva)

entonces basta considerar $(id_{\mathbb{R}}, f^{-1}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ pues así:

$\Psi(id_{\mathbb{R}}, f^{-1}) = (id_{\mathbb{R}} \circ f^{-1})^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$

• Ψ no es inyectiva:

Como: Ψ inyectiva $\iff \forall (f,g)\ (s,t) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ $\Psi(f,g) = \Psi(s,t) \Rightarrow \underbrace{f=g \wedge s=t}_{\iff (f,g)=(s,t)}$

entonces debemos demostrar que: $\exists (f,g), (s,t) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ tq $\Psi(f,g) = \Psi(s,t) \wedge (f \neq s \vee s \neq t$

En efecto, basta considerar $f \in \mathcal{F}$ cualquiera y $id_{\mathbb{R}}$ (pues $id_{\mathbb{R}}$),

pues claramente $(f, id_{\mathbb{R}}) \neq (id_{\mathbb{R}}, f)$ y sin embargo:

$\Psi(f, id_{\mathbb{R}}) = (f \circ id_{\mathbb{R}})^{-1} = f^{-1} = (id_{\mathbb{R}} \circ f)^{-1} = \Psi(id_{\mathbb{R}}, f)$.

(3) $\Psi(\Psi(f,g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) \underset{\text{def. de } \Psi}{=} \Psi((f \circ g)^{-1}, (g^{-1} \circ f^{-1})^{-1}) \underset{(s \circ t)^{-1} = t^{-1} \circ s^{-1}}{=} \Psi((f \circ g)^{-1}, (f \circ g))$

$\underset{\text{def de } \Psi}{=} ((f \circ g)^{-1} \circ (f \circ g))^{-1} \underset{s \circ s^{-1} = id}{=} (id_{\mathbb{R}})^{-1} \underset{id_{\mathbb{R}}^{-1} = id_{\mathbb{R}}}{=} id_{\mathbb{R}}$

P2 (a) (1) Como en el colegio:

$$x^2-(2\cos\theta)x+1=0 \iff x = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta-4}}{2} = \cos\theta \pm |\operatorname{sen}\theta|\cdot i$$

Luego $\forall\theta\in\mathbb{R}$ $\quad x_1=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$

$x_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = e^{-i\theta}$

son soluciones de $x^2-(2\cos\theta)x+1=0$.

(2) Buscamos $x\in\mathbb{C}$ tq $0 = x^{2n}-(2\cos\theta)x^n+1$

$= (x^n)^2-(2\cos\theta)(x^n)+1$

Usando la parte (a):

$$0=x^{2n}-(2\cos\theta)x^n+1 \iff x^n=e^{i\theta} \vee x^n=e^{-i\theta}$$

Y como: $x^n = e^{i\theta} \iff x = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $k=0,\dots,(n-1)$

$x^n=e^{-i\theta}\iff x=e^{i\frac{2k\pi-\theta}{n}}$, $k=0,\dots,(n-1)$

entonces: $0=x^{2n}-(2\cos\theta)x^n+1 \iff x = e^{i\left(\frac{2k\pi\pm\theta}{n}\right)}$, algún $k\in\{0,1,\dots,(n-1)\}$.

(3) Para $n=3$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, el polinomio p es: $p(x)=x^6-1$.
Como $p(x)$ es mónico, entonces, si $\{x_1, x_2 \dots x_6\}\subseteq\mathbb{C}$ son las raíces de $p(x)$, $p(x)$ se puede escribir como: $p(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_6)$.
Ahora, sabemos que x^* es raíz de p ($p(x^*)=x^{*6}-1=0$) ssi $x^*=e^{i\frac{2k\pi}{6}}$, $k=0,\dots,5$

entonces: $p(x) = (x-1)(x-e^{i\frac{\pi}{3}})(x-e^{i\frac{2\pi}{3}})(x-\underbrace{e^{i\pi}}_{=-1})(x-e^{i\frac{4\pi}{3}})(x-e^{i\frac{5\pi}{3}})$ (Factorización en $\mathbb{C}[x]$)

$= (x-1)(x-e^{i\frac{\pi}{3}})(x-e^{i\frac{2\pi}{3}})(x+1)(x-e^{i\frac{4\pi}{3}})(x-e^{i\frac{5\pi}{3}})$

conjugados

$=(x-1)(x+1)(x^2-2\cos(\frac{2\pi}{3})x+1)(x^2-2\cos(\frac{\pi}{3})x+1)$ (Factorización en $\mathbb{R}[x]$)

(b) Sea $n\in\mathbb{N}$.

$$S = 1+\frac{1}{1+i}+\dots+\frac{1}{(1+i)^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+i)^k} = \frac{1-(1+i)^{n+1}}{1-(1+i)} = i(1-(1+i)^{n+1})$$

Y como $1+i=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow 1-(1+i)^{n+1} = 1-2^{\frac{n+1}{2}}\cdot e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}} = \left(1-2^{\frac{n+1}{2}}\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)\right) - i\cdot\left(2^{\frac{n+1}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)\right)$

entonces: $S = i(1-(1+i)^{n+1}) = \left(2^{\frac{n+1}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)\right) + \left(1-2^{\frac{n+1}{2}}\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)\right)i$

P3 (a) Queremos encontrar $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tq $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ pase por los puntos A,B,C,D.
Reemplazando las coordenadas de los puntos en el polinomio:

- Pto $B=(0,4)$: $a+b\cdot0+c\cdot0^2+d\cdot0^3=4 \iff \boxed{a=4}$
- Pto $A=(-2,0)$: $a-2b+4c-8d=0 \iff -b+2c-4d=-2$
- Pto $D=(2,16)$: $a+2b+4c+8d=16\iff b+2c+4d=6$ $\Rightarrow \boxed{c=1}$ $\Rightarrow \boxed{d=2,\ b=-4}$
- Pto $C=(1,3)$: $a+b+c+d=3 \iff b+d=-2$

Entonces $p(x)=4-4x+x^2+2x^3$ pasa por tales puntos.

(b) $\sum_{k=1}^n (a-b)^2x_k^2 + 2\sum_{k=1}^n (a-b)(y_k-ax_k)x_k = (a-b)\cdot\sum_{k=1}^n\left[(a-b)x_k^2+2(y_k-ax_k)x_k\right]$

$=(a-b)\cdot\sum_{k=1}^n\left[2y_kx_k - ax_k^2 - b x_k^2\right] = (a-b)\cdot\left[2\cdot\left(\sum_{k=1}^n x_ky_k\right) - a\cdot\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) - b\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\right]$

$=(a-b)\cdot\left[2\cdot a\sum_{k=1}^n x_k^2 - a\sum_{k=1}^n x_k^2 - b\sum_{k=1}^n x_k^2\right] = (a-b)\left(a\sum_{k=1}^n x_k^2 - b\sum_{k=1}^n x_k^2\right) = \underbrace{(a-b)^2}_{\ge0}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^n x_k^2}_{\ge0} \ge 0$

↑ pues por definición de a: $a\cdot\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n x_k y_k$

(2) Es claro que si se tiene que $\forall b \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{n} (y_n - bx_n)^2 \geq \sum_{n=1}^{n} (y_n - ax_n)^2$

entonces $\sum_{n=1}^{n} (y_n - ax_n)^2 = \min \{ \sum_{n=1}^{n} (y_n - bx_n)^2 \mid b \in \mathbb{R} \}$

Ahora,

$$\sum_{n=1}^{n} (y_n - bx_n)^2 = \sum_{n=1}^{n} (y_n - ax_n + ax_n - bx_n)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \left[(y_n - ax_n)^2 + 2(y_n - ax_n)(ax_n - bx_n) + (ax_n - bx_n)^2 \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \left[(y_n - ax_n)^2 + 2(y_n - ax_n)(a-b)x_n + (a-b)^2 x_n^2 \right]$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{n} (y_n - ax_n)^2 \right] + \underbrace{\sum_{n=1}^{n} \left[(a-b)^2 x_n^2 + 2(a-b)(y_n - ax_n)x_n \right]}_{\geq 0 \text{ por parte (1)}}$$

$$\geq \sum_{n=1}^{n} (y_n - ax_n)^2 + 0$$

Entonces se tiene el resultado.

(3)

$$a = \frac{-2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 16}{4 + 0 + 1 + 4} = \frac{35}{8} = 4{,}375$$

Gráfico: ¬¬ 2º medio stuff.