MA110A Algebra
Un par de problemas resueltos II
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Cristian Figueroa R.

P1.-Desarrolle las siguientes sumas:

(a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{i} a_i - a_{i+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\sum_{k=0}^{i} \binom{N}{k} a^k b^{i-k}$

P2.-Pruebe que los siguientes conjuntos son numerables:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} | x - y = -3\}$

(b) $A = \{B^r_{(x_0,y_0)} \subseteq \mathbb{R}^2 | B^r_{(x_0,y_0)}$ es una circunferencia centrada en $(x_0,y_0) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ y de radio $r \in \mathbb{N}\}$

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} | \exists k \in \mathbb{Z}, \exists i \in \mathbb{N}, x = \dfrac{k}{3^i}\}$

(d) $C = \{x \in [0,+\infty) | \exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}$

(e) $E = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \{-1,1\}^n | n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 0\}$

Solución

P1.-

(a) Vamos a ilustrar un útil método resolviendo la sumatoria de dos formas distintas:

Primera forma: La forma directa, dado a que lo que se esta sumando no depende del índice de la suma de más adentro, tenemos:

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{i} a_i - a_{i+1} = \sum_{i=0}^{N}(i+1)(a_i - a_{i+1})$$

Distribuimos y tratamos de formar una telescópica:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N}(i+1)(a_i - a_{i+1}) &= \sum_{i=0}^{N} ia_i - (i+1)a_{i+1} + a_i \\
&= [\sum_{i=0}^{N} ia_i - (i+1)a_{i+1}] + \sum_{i=0}^{N} a_i \\
&= 0a_0 - (N+1)a_{N+1} + \sum_{i=0}^{N} a_i \\
&= -(N+1)a_{N+1} + \sum_{i=0}^{N} a_i
\end{aligned}$$

Segunda forma: Haciendo un cambio de índices[1]:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{i} a_i - a_{i+1} &= \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=j}^{N} a_i - a_{i+1} \\
&= \sum_{j=0}^{N}[a_j - a_{N+1}] \\
&= \sum_{j=0}^{N} a_j - \sum_{j=0}^{N} a_{N+1} \\
&= \sum_{j=0}^{N} a_j - (N+1)a_{N+1}
\end{aligned}$$

(b) Acá la primera forma no entrega muchos resultados, veamos como funciona

[1]Este es un método útil que fue explicado en la auxiliar pasada

la segunda forma:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N}\sum_{k=0}^{i}\binom{N}{k}a^k b^{i-k} &= \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=k}^{N}\binom{N}{k}a^k b^{i-k}\\
&= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k\sum_{i=k}^{N}b^{i-k}\\
&= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k\sum_{i=0}^{N-k}b^{i}\\
&= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k\frac{1-b^{N-k+1}}{1-b}\\
&= \frac{1}{1-b}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k(1-b^{N-k+1})\\
&= \frac{1}{1-b}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k-\frac{1}{1-b}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k b^{N-k+1}\\
&= \frac{1}{1-b}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k 1^{N-k}-\frac{b}{1-b}\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^k b^{N-k}\\
&= \frac{(a+1)^N}{1-b}-\frac{b(a+b)^N}{1-b}\\
&= \frac{(a+1)^N-b(a+b)^N}{1-b}
\end{aligned}
$$

P2.-

(a) Primero veamos que es infinito:
Dado un $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $(n, n+3) \in A$, esto pues $n+3 \in \mathbb{Z}$ y $n-(n+3) = -3$. Luego encontramos una función inyectiva de $\mathbb{N}$ a A y por tanto $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

Segundo veamos que es numerable. Dado un $x \in \mathbb{Z}$, existe un único $y = x+3 \in \mathbb{Z}$ tal que $(x, y) \in A$. Luego definimos una función $f : A \to \mathbb{Z}$ tal que $f((x, y)) = x$, que por la observación anterior es inyectiva.

Entonces $|A| \leq |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|^2$ y en consecuencia A es numerable.

(b) Primero que veamos que dados $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ fijos el conjunto $C_{(\bar{x},\bar{y})} = \{B^r \subseteq \mathbb{R}^2 | B^r$ es una circunferencia centrada en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de radio $r \in \mathbb{N}\}$ es numerable.

En efecto si asociamos cada circunferencia con un radio de la siguiente forma: $f : \mathbb{N} \to C_{(\bar{x},\bar{y})}$ tal que $f(n) = B^n$. Esta resulta ser una función

[2] Visto en cátedra

sobreyectiva pues recorremos todos los elementos de $C_{(\bar{x},\bar{y})}$, además si dos circunferencias son iguales es porque tienen el mismo radio, luego f es inyectiva y por lo anterior es biyectiva. En consecuencia $C_{(\bar{x},\bar{y})}$ es numerable

¿Como pasamos de $C_{(\bar{x},\bar{y})}$ al conjunto que queremos probar que es numerable?

La diferencia fundamental entre el conjunto que queremos probar y $C_{(\bar{x},\bar{y})}$ es que en una tenemos fijo el centro, y en la otra puede ser cualquier par de numeros naturales.

La union es nuestra salida. El hecho de que sea cualquier par de numeros naturales se puede ver como una union más explícitamente:

$$A = \bigcup_{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} C_{(x,y)}$$

Luego como es union numerable de numerables, el conjunto A es numerable.

(c) Primero veamos que es infinito:
Dado un i fijo, (Ejemplo $i = 1$) se tiene que los elementos $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{k}{3}, \ldots$ están en A. Luego A es infinito.

Dado que para cualquier $x \in A$, $x = \frac{k}{3^i} \in \mathbb{Q}$ se tiene que $A \subseteq \mathbb{Q}$, y como $\mathbb{Q}$ es numerable[3], se concluye que A también lo es.

(d) Este conjunto representa los elementos no negativos, tales que alguna raíz (cuadrada, cubica, 7-ésima, etc.) es natural. El hecho de que pueda ser cualquier raíz, complica un poco por lo que ignoremoslo por un momento y consideremos un $\bar{n}$ fijo. Definamos:

$$C_{\bar{n}} = \{x \in [0, +\infty) | x^{\bar{n}} \in \mathbb{N}\}$$

Veamos que $C_{\bar{n}}$ es infinito:
Dado $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $k^{\bar{n}} \in \mathbb{N}$ (pues es multiplicación de numeros naturales), por tanto $\mathbb{N} \subseteq C_{\bar{n}}$ y en particular tenemos que $C_{\bar{n}}$ es infinito.

¿Estamos listos? No, pues $C_{\bar{n}}$ podría ser no numerable (como $[0, +\infty)$).

Entonces segundo, tenemos que encontrar una función que vaya de nuestro conjunto a los naturales y que sea inyectiva. Afortunadamente la misma definición de nuestro conjunto $C_{\bar{n}}$ nos relaciona sus elementos con los naturales. Consideremos la función $f : C_{\bar{n}} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x) = x^{\bar{n}}$.

Inyectividad:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ x^{\bar{n}} &= y^{\bar{n}} \\ x &= y \end{aligned}$$

[3] Visto en cátedra

La última igualdad se tiene pues la raíz $\bar{n}$-ésima es inyectiva para números no negativos.

Luego $C_{\bar{n}}$ es numerable, ¿Como podemos concluir que C es numerable? Es decir que ahora nuestro conjunto no tenga un valor $\bar{n}$ fijo, que pueda tomar cualquier valor natural.

Hacemos lo mismo que la parte (c), escribimos el conjunto como una union:

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

Y como C es union numerable de numerables, se tiene que es numerable.

(e) Primero veamos que es infinito:
Dado $n \in \mathbb{N}$ tenemos que el elemento

$$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ elementos}}, \underbrace{-1, , -1, \ldots, -1}_{n \text{ elementos}}) \in \{1, -1\}^{2n}$$

Pertenece a E, y como tenemos esto para cada n tenemos que E es infinito.

Para ver la numerabilidad, fijemos un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ par. Y definamos el conjunto:

$$E_{\bar{n}} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{\bar{n}}) \in \{-1, 1\}^{\bar{n}} | \sum_{i=1}^{\bar{n}} a_i = 0\}$$

Este conjunto al estar contenido en $\{-1, 1\}^{\bar{n}}$ sabemos que es finito (hay a lo más $2^{\bar{n}}$ combinaciones posibles, de las cuales sólo $\binom{2n}{n}$ sirven[4]). Vale notar que si $\bar{n}$ es impar el conjunto $E_{\bar{n}}$ es vacío.

Nuevamente nos gustaría que en el conjunto se pudiera considerar cualquier $n \in \mathbb{N}$, y notando que:

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

Tenemos que E es union numerable de conjuntos finitos, esto puede ser numerable (por ejemplo $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}$), puede ser finito (por ejemplo $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\text{mín}\{1, n\}\} = \{0, 1\}$) o puede ser vacío si todos los conjuntos son vacíos.

Como vimos que E es infinito, entonces quiere decir que se da el primer caso, es decir E es numerable.

CRF

[4] No es necesario explicitar esto, basta con saber que el conjunto es a lo más finito