Algunos Problemas Resueltos I - MA110 Algebra
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Aux.Cristian Figueroa R.

Problemas Sumas.- Encuentre el valor de las siguientes sumas:

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}$.

(b $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{i+j-1}{j}$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Problemas Inducción.- Pruebe por inducción.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$.

(b) $n^3 < 2^n \quad \forall n \geq 10$.

Solución:

P.Sumas(a) Primera forma:

Desarrollemos el coeficiente y calculamos las sumas:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k!}{2!(k-2)!} \\
&= \frac{1}{2!} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots \cdot 2 \cdot 1}{(k-2)(k-3)\ldots \cdot 2 \cdot 1} \\
&= \frac{1}{2!} \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1) \\
&= \frac{1}{2!} \sum_{k=0}^{n+1} k(k-1) \\
&= \frac{1}{2!} \{\sum_{k=0}^{n+1} k^2 - \sum_{k=0}^{n+1} k\} \\
&= \frac{1}{2!} \{\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} - \frac{(n+1)(n+2)}{2}\} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1-3)}{12} \\
&= \frac{2(n+1)(n+2)n}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\
&= \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} \\
&= \binom{n+2}{3}
\end{aligned}
$$

Segunda forma:

Inducción. De alguna forma intuimos que el valor de la suma es $\binom{n+2}{3}$, y lo probamos.

Caso base:

$$\sum_{k=2}^{2} \binom{k}{2} = 1 = \binom{3}{3}$$

Paso inductivo

Si se tiene para n, preobemos que se tiene para $n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{(n+1)+1} \binom{k}{2} &= \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} + \binom{n+2}{2} \\
&= \binom{n+2}{3} + \binom{n+2}{2} \\
&= \binom{n+3}{3}
\end{aligned}$$

Donde en la última parte se ocupa la propiedad $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Luego se tiene que $\forall n \geq 2 \quad \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}$.

<u>Tercera forma</u>:

Ocupando la propiedad de los coeficientes binomiales $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} &= \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k+1}{3} - \binom{k}{3} \\
&= \binom{n+2}{3} - 0.
\end{aligned}$$

Pues esta última suma era telescópica, y consideramos que $\binom{2}{3} = 0$ pues corresponde a la cantidad de conjuntos de tamaño 3 que puedo hacer con 2 elementos.

<u>Cuarta forma</u>:

Sabemos que $\binom{k}{2}$ es el coeficiente que acompaña a x^2 en el polinomio $(1+x)^k$. Luego $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}$ debiera ser el coeficiente que acompaña a x^2 en el polinomio $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} (1+x)^k$.

Veamos más de cerca este polinomio:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1}(1+x)^k &= (1+x)^2\sum_{k=2}^{n+1}(1+x)^{k-2}\\
&= (1+x)^2\sum_{j=0}^{n-1}(1+x)^j\\
&= (1+x)^2\frac{(1+x)^n-1}{(1+x)-1}\\
&= \frac{(1+x)^{n+2}-(1+x)^2}{x}
\end{aligned}
$$

Aquí ocupamos la forma de la suma geométrica y un cambio de índice.

Como estamos dividiendo por x tenemos que el coeficiente que acompaña a x^2 en el polinomio $\sum_{k=2}^{n+1}(1+x)^k$ es el coeficiente que acompaña a x^3 en el polinomio $(1+x)^{n+2}-(1+x)^2$, es decir el coeficiente que acompaña a x^3 en $(1+x)^{n+2}$, es decir $\binom{n+2}{3}$. Luego $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\binom{k}{2}=\binom{n+2}{3}$

P.Sumas(b)

Ahora la primera forma no sirve mucho, la segunda funciona bien si es que intuimos que la suma vale $\binom{n+j}{j+1}$ (Propuesto), veamos como funcionan la tercera y la cuarta forma:

<u>Tercera forma</u>:

Ocupando la propiedad de los coeficientes binomiales $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\binom{i+j-1}{j} &= \sum_{i=1}^{n}\binom{i+j}{j+1}-\binom{i+j-1}{j+1}\\
&= \binom{n+j}{j+1}-0.
\end{aligned}
$$

Pues era una suma telescópica.

<u>Cuarta forma</u>:

Sabemos que $\binom{i+j-1}{j}$ es el coeficiente que acompaña a x^j en el polinomio $(1+x)^{i+j-1}$. Luego $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\binom{i+j-1}{j}$ debiera ser el coeficiente que acompaña a x^j en el polinomio $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(1+x)^{i+j-1}$.

Veamos más de cerca este polinomio:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(1+x)^{i+j-1} &= (1+x)^j\sum_{i=1}^{n}(1+x)^{i-1} \\
&= (1+x)^j\sum_{i=0}^{n-1}(1+x)^{i} \\
&= (1+x)^j\frac{(1+x)^n-1}{(1+x)-1} \\
&= \frac{(1+x)^{n+j}-(1+x)^j}{x}
\end{aligned}$$

Aquí ocupamos la forma de la suma geométrica y un cambio de índice. Como estamos dividiendo por x tenemos que el coeficiente que acompaña a x^j en el polinomio $\sum_{i=1}^{n}(1+x)^i$ es el coeficiente que acompaña a x^{j+1} en el polinomio $(1+x)^{n+j}-(1+x)^j$, es decir el coeficiente que acompaña a x^{j+1} en $(1+x)^{n+j}$, es decir $\binom{n+j}{j+1}$. Luego $\sum_{i=1}^{n}\binom{i+j-1}{j}=\binom{n+j}{j+1}$

P.Sumas(c)

Acá ni la primera, ni la segunda, ni la tercera forma funcionan muy bien. Hay que recurrir a la cuarta de manera astuta y poco natural.

¿a quien pertence el coeficiente $\binom{n}{k}^2$?

La intuición diría que intentemos con la multiplicación de dos polinomios de grado n. Por ejemplo:

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$$

Por una parte sabemos que:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k1^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k
\end{aligned}$$

Veamos como son los coeficientes la multiplicación de los otros polinomios.

$$(1+x)^n(1+x)^n = (\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i1^{n-i})(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j1^{n-j})$$

La pregunta es ¿de dónde sacamos $\binom{n}{k}^2$?

Más sencillo... ¿Quién tiene $\binom{n}{0}^2$?

Para $j=0$ y $i=0$ tenemos que x^0 esta acompañado de $\binom{n}{0}^2$.
Pero hay alguien más, ocupando una de las propiedades de los coeficientes combinatoriales ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$), tenemos que $\binom{n}{0}^2 = \binom{n}{0}\binom{n}{n}$, luego el $x^{0+n} = x^n$ también esta acompañado de $\binom{n}{0}^2$.

¿Quién tiene $\binom{n}{1}^2$?

Para $j=1$ y $i=0$ tenemos que x^1 esta acompañado de $\binom{n}{1}^2$.
Pero hay alguien más, ocupando una de las propiedades de los coeficientes combinatoriales, tenemos que $\binom{n}{1}^2 = \binom{n}{1}\binom{n}{n-1}$, luego el $x^{1+n-1} = x^n$ también esta acompañado de $\binom{n}{1}^2$.

Ahora la grán pregunta... ¿Quién acompaña a x^n?

Tenemos que:

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x)^n &= (\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i1^{n-i})(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j1^{n-j}) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}x^{i+j}\end{aligned}$$

Luego los coeficientes que acompañan a x^n aparecen cuando $j = n-i$, y corresponden a $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.

Pero el coeficiente que acompaña a x^n en $(1+x)^{2n}$ es $\binom{2n}{n}$,y debiera ser el mismo de antes. Luego $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

P.Inducción(a)

Caso base:

$$\sum_{k=1}^{1+1}\frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq \frac{5}{6}$$

Paso Inductivo: Si la propiedad es válida para n, probemos que es válida para $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{(n+1)+1} \frac{1}{(n+1)+k} &= \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+(k+1)} \\
&= \sum_{k=2}^{n+3} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{n+1} \\
&\leq \frac{5}{6} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \\
&\leq \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

La última desigualdad se tiene pues $2n+3 \geq 2n+2$.

P.Inducción(b)

Caso base:

$$10^3 = 1000 < 2^{10} = 1024.$$

Paso Inductivo: Si la propiedad es válida para n, probemos que es válida para $n+1$.

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&< 2^n + 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

Luego bastaría mostrar que $\forall m \geq 10$ se tiene que $3m^2 + 3m + 1 < 2^m$. Veamoslo.

Caso base:

$$3 \cdot 100 + 30 + 1 = 331 < 1024$$

Paso Inductivo: Si la propiedad es válida para m, probemos que es válida para $m+1$.

$$\begin{aligned}
3(m+1)^2 + 3(m+1) + 1 &= 3m^2 + 9m + 3m + 7 \\
&= 3m^2 + 3m + 1 + 6m + 6 \\
&< 2^m + 6m + 6
\end{aligned}$$

Luego bastaría mostrar que $\forall p \geq 10$ se tiene que $6p + 6 < 2^p$. Veamoslo.

Caso base:

$$60 + 6 = 66 < 1024$$

Paso Inductivo: Si la propiedad es válida para p, probemos que es válida para $p+1$.

$$\begin{aligned} 6(p+1)+6 &= 6p+6+6 \\ &< 2^p+6 \\ &< 2^p+2^p \\ &= 2^{p+1} \end{aligned}$$

Esto último pues $6 < 2^p$ para cualquier $p \geq 10$. Luego se tiene que $\forall p \geq 10$ se tiene que $6p+6 < 2^p$, y por tanto

$$\begin{aligned} 3(m+1)^2+3(m+1)+1 &< 2^m+6m+6 \\ &< 2^m+2^m \\ &= 2^{m+1} \end{aligned}$$

Luego tenemos que $\forall m \geq 10$ se tiene que $3m^2+3m+1 < 2^m$, y por tanto

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &< 2^n+(3n^2+3n+1) \\ &< 2^n+2^n \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

Luego la propiedad es válida para $n+1$.

CRF