MA110 Sección 7
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Auxs. Cristian Figueroa, Tomás Gonzalez, Guido Lagos.
Solución P3 (b) Guía Funciones

P3. Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $T : A \to A$ la función definida por ...
... $\bar{f} = f \circ T(n) - f(n)$.

(b) Sea $D = \{h : A \to \mathbb{R} | h$ es función y $h(0) = 0\}$. Definimos $\Delta : D \to I$ en cada $f \in D$ por $\Delta(f) = \bar{f}$. Probar que es biyectiva y calcular Δ^{-1}.

Solución: Primero veamos que tiene sentido Δ, es decir que es función. Dada una función f en D, tenemos que $\bar{f}$ es función (por ser suma y composición de funciones) y además por la parte (a) se tiene que $\bar{f} \in I$. Luego Δ esta bien definido.

Inyectividad:
Si $\Delta(f) = \Delta(g)$ se tiene:

$$\begin{array}{rcll} \Delta(f) & = & \Delta(g) & \Leftrightarrow \\ \bar{f} & = & \bar{g} & \Leftrightarrow \\ f \circ T(n) - f(n) & = & f \circ T(n) - f(n) & \forall n \in A \end{array}$$

Notemos que como f y g están en D, se tiene que $f(0) = g(0)$. Ahora de la ultima igualdad evaluando en $n = 0$, se tiene que:

$$\begin{array}{rcll} f(T(0)) - f(0) & = & g(T(0)) - g(0) & \Leftrightarrow \\ f(T(0)) - 0 & = & g(T(0)) - 0 & \Leftrightarrow \\ f(1) & = & g(1) & \end{array}$$

Haciendo lo mismo para $n = 1$:

$$\begin{array}{rcll} f(T(1)) - f(1) & = & g(T(1)) - g(1) & \Leftrightarrow \\ f(T(1)) & = & g(T(1)) & \Leftrightarrow \text{(Como } f(1) = g(1) \text{ se cancelan)} \\ f(2) & = & g(2) & \end{array}$$

Nuevamente para $n = 2$:

$$\begin{array}{rcll} f(T(2)) - f(2) & = & g(T(2)) - g(2) & \Leftrightarrow \\ f(T(2)) & = & g(T(2)) & \Leftrightarrow \text{(Como } f(2) = g(2) \text{ se cancelan)} \\ f(3) & = & g(3) & \end{array}$$

Luego tenemos que $f(n) = g(n)$ para $n = 0, 1, 2, 3.$, es decir $f(n) = g(n)$ $\forall n \in A$, i.e. $f = g$. Es decir Δ es inyectiva.

Sobreyectividad:
Dada $g \in I$, queremos encontrar un $f \in D$ tal que $\Delta(f) = g$, es decir $\bar{f} = g$. Equivalentemente $f(T(n)) - f(n) = g(n)$ $\forall n \in A$. Como f tiene que estar en D debemos tener necesariamente que $f(0) = 0$.

Evaluando en $n = 0$:

$$\begin{array}{rcll} f(T(0)) - f(0) & = & g(0) & \Leftrightarrow \\ f(T(0)) - 0 & = & g(0) & \Leftrightarrow \\ f(1) & = & g(0) & \end{array}$$

Evaluando en $n = 1$:

$$\begin{array}{rcll} f(T(1)) - f(1) & = & g(1) & \Leftrightarrow \\ f(T(1)) - g(0) & = & g(1) & \Leftrightarrow \\ f(2) & = & g(1) + g(0) & \end{array}$$

Evaluando en $n = 2$:

$$\begin{array}{rcll} f(T(2)) - f(2) & = & g(2) & \Leftrightarrow \\ f(T(2)) - (g(1) + g(0)) & = & g(2) & \Leftrightarrow \\ f(3) & = & g(2) + g(1) + g(0) & \end{array}$$

Con esto tenemos completamente definido f, pues conocemos su valor en todo A. Falta ver que se cumple $f(T(3)) - f(3) = g(3)$. Veamos:

$$\begin{array}{rcll} f(T(3)) - f(3) & = & f(0) - f(3) & \Leftrightarrow \\ & = & -g(2) - g(1) - g(0) & \Leftrightarrow \\ & = & g(3) - (g(3) + g(2) + g(1) + g(0)) & \Leftrightarrow \\ & = & g(3) & \end{array}$$

Pues como $g \in I$ se tiene que la suma vale 0.

Luego con f definida como:

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ f(1) & = & g(0) \\ f(2) & = & g(1) + g(0) \\ f(3) & = & g(2) + g(1) + g(0) \end{array}$$

se tiene que $f \in D$ y $\Delta(f) = g$. Luego Δ es sobreyectiva, y la inversa es la función $\Delta^{-1} : I \to D$, que a un g le asocia $\Delta^{-1}(g)$, definido como:

$$\begin{array}{rcl} \Delta^{-1}(0) & = & 0 \\ \Delta^{-1}(1) & = & g(0) \\ \Delta^{-1}(2) & = & g(1) + g(0) \\ \Delta^{-1}(3) & = & g(2) + g(1) + g(0). \end{array}$$

$\square$