P1, semana 15. Juntando la información del enunciado, tenemos que existen cuocientes Q_1, Q_2 tales que $F = Q_1 \cdot GH + R$ y $R = Q_2 \cdot G + R'$. Además sabemos que $gr(R) < gr(GH)$ y que $gr(R') < gr(G)$.

Juntando las dos igualdades, nos queda que

$$F = Q_1GH + Q_2G + R' = (Q_1H + Q_2)G + R'$$

Como sabemos que $gr(R') < gr(G)$, entonces ésta es la descomposición del Teorema de la Divisón para $F : G$. Entonces el resto asociado a esta división es R'.

P2, semana 14. Queremos encontrar las raíces del polinomio $p(z) = z^3 - 9z^2 + 33z - 65$. Sabiendo que hay una raíz compleja w, tenemos que otra de las raíces debe ser su conjugado $\bar{w}$, ya que los coeficientes de p son reales. Como además el polinomio es cúbico, la tercera raíz debe ser real, a.

Siendo p mónico, se puede factorizar como

$$p(z) = (z - a)(z - w)(z - \bar{w})$$

de donde obtenemos (usando que $|w| = \sqrt{13}$)

$$\begin{aligned} p(z) &= (z - a)(z^2 - 2\Re(w)z + 13) \\ &= z^3 - (2\Re(w) + a)z^2 + (2a\Re(w) + 13)z - 13a \end{aligned}$$

($\Re(w)$ es la parte real de w)

Así, igualando términos semejantes, obtenemos que $-13a = -65$ osea $a = 5$, y que $-(2\Re(w) + a) = -9$ o sea $\Re(w) = 2$. Juntando esto con que $|w| = \sqrt{13}$, podemos despejar $w = 2 + 3i$ y $\bar{(w)} = 2 - 3i$.

P3, semana 14. Es fácil obtener que las raíces de x^2+x+1 son $x_1 = e^{i2\pi/3}$ y $x_2 = \bar{x_1}$ (usar fórmula de la cuadrática), por lo que $x^2+x+1 = (x-x_1)(x-x_2)$. Entonces, para mostrar que este polinomio divide a $p(x) = x^{2n} + 1 + (x + 1)^{2n}$, basta demostrar que x_1 y x_2 también son raíces de p. De hecho, basta mostrarlo para x_1 pues p tiene coeficientes reales y x_2 es su conjugado.

Si $n = 3k + 1$, entonces $x_1^{2n} = x_1^{6k+2} = x_1^2 e^{i4k\pi} = x_1^2$. Además,

$$\begin{aligned} (x_1 + 1)^{2n} &= (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1)^{2n} \\ &= (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{2n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-\bar{x_1})^{2n} \\
&= (-1)^{2n} x_2^{2n} \\
&= x_2^{3k+1} = x_2 e^{-i2k\pi} = x_2
\end{aligned}
$$

Entonces nos queda $p(x_1) = x_2^2 + 1 + x_2$. Notar que $1, x_2, x_2^2$ son exactamente las tres raíces cúbicas de la unidad, y por lo tanto $p(x_1) = 0$, es decir x_1 es raíz de p.

Para el caso en que $n = 3k - 1$ se procede análogamente.

P4, semana 14. Sabemos que p posee n raíces distintas. Llamemos $a_1, \ldots, a_k$ a las raíces reales de p, y $z_1, \ldots, z_m$ a las raíces complejas. Dado que toda vez que un z complejo es raíz de p entonces $\bar{z}$ también, podemos reescribir estas m raíces complejas como $w_1, \ldots, w_l, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_l$. Así, al ser mónico p se factoriza como

$$p(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_k)(x - w_1) \ldots (x - w_l)(x - \bar{w}_1) \ldots (x - \bar{w}_l)$$

o, lo que es lo mismo,

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x - a_1) \ldots (x - a_k)(x - w_1)(x - \bar{w}_1) \ldots (x - w_l)(x - \bar{w}_l) \\
&= (x - a_1) \ldots (x - a_k)(x^2 - 2\Re(w_1)z + |w_1|^2) \ldots (x^2 - 2\Re(w_l)z + |w_l|^2)
\end{aligned}
$$

Hemos concluido que p se escribe como un producto de polinomios donde cada uno de los factores está en $\mathbb{R}[x]$, por lo tanto $p \in \mathbb{R}[x]$, es decir los coeficientes de p son reales.