P5. Notemos que nos piden encontrar un polinomio f que divida a todos los polinomios de I, por lo que f de alguna manera tiene que ser "más pequeño" que todos los polinomios de I. En la división de polinomios, este "tamaño" se traduce en términos del grado de los polinomios.

Inspirados en esto, y observando que $A = I \setminus \{0\} \neq \emptyset$ pues $I \neq \{0\}$, elijamos cualquier $f \in A$ cuyo grado sea el más pequeño posible (¿por qué existe este grado mínimo?). Dado entonces cualquier $g \in I$, gracias al teorema de la división podemos escribir

$$g(x) = q(x) \cdot f(x) + r(x)$$

donde q es el cuociente y r el resto. Además, sabemos que $gr(r) < gr(f)$. Es importante recordar que para aplicar el teorema de la división debe cumplirse que $f \neq 0$. Sin embargo, esto es cierto porque como $f \in A$ entonces $gr(f) \geq 0$ (acordarse que el grado del polinomio nulo es $-\infty$).

A partir de la igualdad $g = q \cdot f + r$, despejamos $r = g - q \cdot f$. Como $f \in A \subseteq I$, usando la segunda hipótesis concluimos que $q \cdot f \in I$. Como además sabemos que I es grupo, entonces $r \in I$.

Supongamos que $r \neq 0$. Entonces $r \in A$, y como $gr(r) < gr(f)$ llegamos a una contradicción (el grado de f era menor o igual que el de todos los polinomios en A). Debe tenerse entonces que $r = 0$, o sea $g(x) = q(x) \cdot f(x)$, y por lo tanto $f \mid g$, con lo que concluimos la demostración.

P6a. Dada la información que tenemos de la primera hipótesis, podemos escribir

$$p(x) = Q(x) \cdot (x^2 - b^2) + cx \tag{1}$$

donde $Q(x)$ es el cuociente de dividir $p(x)$ por $(x^2 - b^2)$. De aquí, es directo concluir que

$$\begin{aligned} p(b) &= Q(b) \cdot 0 + cb = cb \\ p(-b) &= Q(-b) \cdot 0 + c(-b) = -cb \end{aligned}$$

P6b. Por el teorema de la división, podemos escribir

$$p(x) = q(x) \cdot (x^2 - b^2)(x - a) + r(x) \tag{2}$$

donde q es el cuociente y r es el resto. Estamos dividiendo $p(x)$ por $(x^2 - b^2)(x - a)$, el cual es un polinomio de grado 3, por lo tanto el teorema de la división nos asegura que $gr(r) < 3$, es decir $gr(r) \leq 2$.

P6c. De la parte anterior, sabemos que $gr(r) \leq 2$, luego podemos escribir $r(x) = r_2x^2 + r_1x + r_0$ con $r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ (podrían eventualmente ser nulos). Usando la parte (a) en la igualdad (2), obtenemos que

$$r(b) = p(b) = cb \qquad \text{y} \qquad r(-b) = p(-b) = -cb$$

Pero $r(b) = r_2b^2 + r_1b + r_0$ y $r(-b) = r_2b^2 - r_1b + r_0$. Tenemos entonces las ecuaciones

$$\begin{aligned} r_2b^2 + r_1b + r_0 &= cb \\ r_2b^2 - r_1b + r_0 &= -cb \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones, obtenemos que $2r_1b = 2cb$, es decir $r_1 = c$. Y sumándolas, obtenemos que $2r_2b^2 + 2r_0 = 0$, o sea $r_0 = -r_2b^2$. Reemplazando esto, vemos que

$$r(x) = r_2 \cdot (x^2 - b^2) + cx$$

y recordando que $r(x)$ debe ser mónico, decidimos que $r_2 = 1$, entonces $r(x) = x^2 + cx - b^2$.

Sin embargo, es importante notar que hay un caso particular donde hay otra posible solución: en efecto, si se cumpliera $c = 1$, entonces otra solución es tomar $r_2 = 0$, con lo que nos queda $r(x) = cx = x$.