Pauta Problema 3

Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo (no necesariamente con unidad). Para $n \in \mathbb{Z}$ y $Q \in A$ se define

$$na = \underbrace{a + a + ... + a}_{n \text{ veces}} \text{ si } n > 0; \; 0a = 0_A \in A \text{ si } n = 0$$
$$\text{y} \quad na = \underbrace{(-a) + (-a) + ... + (-a)}_{-n \text{ veces}} \text{ si } n < 0$$

Además, puede usar, sin demostrar que:

$$(\forall m, n \in \mathbb{Z})(\forall a, b \in A)(n+m)a = na + ma$$
$$n(ma) = nma; a(nb) = nab$$

Considere en $(\mathbb{Z} \times A)$ las leyes suma y producto definidas por

Suma: $(n,a) \oplus (m,b) = (n+m, a+b)$

Producto: $(n,a) \odot (m,b) = (n,m, nb + ma + ab)$

i) Demuestre que $(\mathbb{Z}\times, \oplus, \odot)$ es un anillo con unidad. En efecto $(\mathbb{Z} \times \oplus)$ es grupo Abeliano pués

$\oplus$ es cerrada en $\mathbb{Z} \times A$ pués $(n+m, a+b) \in \mathbb{Z} \times A$.

$\oplus$ es asociativa y conmutativa puesto que $+$ en $\mathbb{Z}$ y $+$ en A asocian y conmutan en esos anillos.

Neutro para $\oplus$: $(0, 0_A) \in \mathbb{Z} \times A$ pués

$$(n,a) \oplus (0, 0_A) = (n+0, a+0_A) = (n,a) = (0,0_A) \oplus (n,a)$$

Simétricos: $\forall (n,a) \in \mathbb{Z} \times A$ existe $(-n,-a) \in \mathbb{Z} \times A$ tal que

$$(n,a) \oplus (-n,-a) = (n-n, a(-a)) = (0, 0_A)$$

por lo tanto $(\mathbb{Z} \times A, \oplus)$ es grupo Abeliano. (1.0 pto.)

$\odot$ es asociativa. Por demostrar que $\forall (n_1,a_1),(n_2,a_2),(n_3,a_3) \in \mathbb{Z} \times A$ se cumple

$$(n_1,a_1) \odot [(n_2,a_2) \odot (n_3,a_3)] = [(n_a,a_1)) \odot (n_2,a_2)] \odot (n_3,a_3)$$

En efecto $(n_1,a_1) \odot [(n_2,a_2) \odot (n_3,a_3)] = (n_1,a_1) \odot (n_2n_3, n_2a_3 + n_3a_2 + a_2a_3) = (n_1n_2n_3, n_1n_2a_3 + n_1n_3a_2 + n_1a_2a_3 + n_2n_3a_1 + n_2a_1a_3 + n_3a_1a_2 + a_1a_2a_3)$ y $[(n_1,a_1) \odot (n_2,a_2)] \odot (n_3,a_3) = (n_1n_2, n_1a_2 + n_2a_1 + a_1a_2) \odot (n_3,a_3) = (n_1n_2n_3, n_1n_2a_3 + n_3n_1a_2 + n_3n_2a_1 + n_3a_1a_2 + n_1a_2a_3 + n_2a_1a_3 + a_1a_2a_3)$ y estos desarrollos son iguales si se consideran la asociatividad y propiedades de la definición en el anillo $(A,+,\cdot)$ (0.5 ptos.)

Distributividad

$$(n_1,a_1) \odot [(n_2,a_2) \oplus (n_3,a_3)] = (n_1,a_1) \odot (n_2,a_2) \oplus (n_1,a_1) \odot (n_3,a_3)$$

En efecto

$$(n_1,a_1) \odot [(n_2,a_2) \oplus (n_3,a_3)] = (n_1,a_1) \odot (n_2 + a_3, a_2 + a_3)$$
$$= (n_1n_2 + n_3), n_1a_2 + n_1a_3 + n_2a_1 + n_3a_1 + a_1a_2 + a_1a_3)$$

y

$$(n_1,a_1) \odot (n_2,a_2) \oplus (n_1,a_1) \odot (n_3,a_3) = (n_1n_2, n_1a_2 + n_2a_1 + a_1a_2)$$
$$\oplus (n_1a_3 + n_1a_3 + n_3a_1 + a_1a_3)$$
$$= (n_1(n_2+n_3), n_1a_2 + n_2a_1 + n_1a_3 + n_3a_1 + a_1a_2 + a_1a_3)$$

y los desarrollos son iguales usando las propiedades de $(A, +, \cdot)$ por lo tanto $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ es un anillo. (0.5 ptos.)

Unidad: $(n, u) \in \mathbb{Z} \times A$ es unidad de $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ si $\forall (m, b) \in \mathbb{Z} \times A$

$$(n, u) \odot (m, b) = (m, b) \odot (n, u) = (m, b)$$

Entonces

$$(nm, nb + mu + ub) = (m, b) \Rightarrow = \begin{cases} n \cdot m & = m \\ nb + mu + ub & = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow n = 1 \in \mathbb{Z} \text{ y } 1 \cdot b + mu + ub = b \Rightarrow mu + ub = 0_A$$

y esto último se cumple solo si $u = 0_A(m \cdot 0_A + 0_A b = 0_A)$. Así $(1, 0_A) \in \mathbb{Z} \times A$ es unidad de $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ (1.0 pto.)

ii) Demuestre que las funciones

$$\begin{array}{rlcrl} f: A & \to \mathbb{Z} \times A & \quad \text{y} \quad & g: \mathbb{Z} & \to \mathbb{Z} \times A \\ a & \to f(a) = (0, a) & & n & \to g(n) = (n, 0_A) \end{array}$$

son homomorfismos inyectivos de los anillos $(A, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ en el anillo $(\mathbb{Z} \times A, \oplus, \odot)$ respectivamente.

En efecto: f inyectiva $f(a) = f(b) \Rightarrow (0, a) = (0, b) \Rightarrow a = b$.

Morfismos:

$$\begin{array}{rrl} \text{Para } \oplus & f(a) \oplus f(b) = (0, a) \oplus (0, b) & = (0, a + b) = f(a + b) \\ \text{Para } \odot & f(a) \odot f(b) = (0, a) \odot (0, b) & = (0, 0b + 0a + ab) \\ & & = (0, ab) = f(ab) \end{array}$$

(0.8 ptos.)

g inyectiva $g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow (n_1, 0_A) = (n_2, 0_A) \Rightarrow n_1 = n_2$

Morfismos:

$$\begin{array}{rrl} \text{Para } \oplus & g(n_1) \oplus g(n_2) = (n_1, 0_A) \oplus (n_2, 0_A) & = (n_1 + n_2, 0_A) = g(n_1 + n_2) \\ \text{Para } \odot & g(n_1) \odot g(n_2) = (n_1, 0_A) \odot (n_2, 0_A) & = (n_1 n_2, n_1 0_A + n_2 0_A + 0_A 0_A) \\ & & = (n_1 n_2, 0_A) = g(n_1 n_2) \end{array}$$

(0.7 ptos.)

iii) Considere en lugar de $(A, +, \cdot)$ el cuerpo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ Muestre que el anillo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ tiene divisores del cero

Es $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ un cuerpo?

Bastará tomar, por ejemplo $(0, [a]_5)$ y $(n, [b]_5)$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5$ y plantear $(0, [a]_5) \odot (n, [b]_5) = (0, [0]_5) =$ cero en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5$. Entonces $(0 \cdot n, 0 \cdot [b]_5 + n[a]_5 + [0]_5[b]_5) \Rightarrow (0, n[a]_5 + [ab]_5) = (0, [0]_5)$.

De esto, si tomamos, $n = 1, [a] = [1]$ y $[b] = [4]$ se tiene:

$$n[a]_5 + [ab]_5 = 1[1]_5 + [4]_5 = [5]_5 = [0]_5 \Rightarrow (0, [1]_5) \odot (1, [4]_5) = (0, [0]_5)$$

Así, $(0, [1]_5) \neq (0, [0]_5)$ y $(1, [4]_5) \neq (0, [0]_5)$ son divisores del cero de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ (1.2 ptos.)

$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \odot)$ no puede ser cuerpo porque tiene divisores del cero. (0.3 ptos.)