Problema 6

Sea $(E, *)$ una estructura algebraica y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia que satisface la siguiente propiedad:

$$(\forall x_1, x_2, y_1, y_2) \quad x_1 \mathcal{R} x_2 \wedge y_1 \mathcal{R} y_2 \implies (x_1 * y_1) \mathcal{R} (x_2 * y_2)$$

Definimos una nueva l.c.i. $\otimes$ sobre el conjunto cuociente $E/\mathcal{R}$ mediante:

$$[x]_{\mathcal{R}} \otimes [y]_{\mathcal{R}} = [x * y]_{\mathcal{R}}$$

(a) Pruebe que $\otimes$ está bien definida, es decir que la clase de equivalencia de $x * y$ no depende de los representantes de $[x]_{\mathcal{R}}$ y $[y]_{\mathcal{R}}$ que se escojan.

(b) Si $*$ tiene a $e \in E$ como neutro, muestre que $\otimes$ tiene neutro en $E/\mathcal{R}$ y encuentre dicho neutro.

(c) ¿Qué condición debe cumplirse para que $[a]_{\mathcal{R}} \in E/\mathcal{R}$ tenga inverso para $\otimes$? Muestre que si $a \in E$ tiene inverso para $*$, entonces $[a]_{\mathcal{R}}$ lo tiene para $\otimes$, y calcúlelo.

(d) Dé un ejemplo de algún caso en que $a \in E$ NO tiene inverso para $*$, pero $[a]_{\mathcal{R}}$ SÍ lo tiene para $\otimes$.