P2. Calculemos las tres sumas desde adentro hacia afuera. La más interna es

$$\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{8^{k+1}}{3^i} = \frac{8}{3^i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} 8^k = \frac{8 \cdot (8+1)^i}{3^i} = 8 \cdot 3^i$$

usando Binomio de Newton. Luego, la segunda nos queda

$$\sum_{i=1}^{j} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{8^{k+1}}{3^i} = \sum_{i=1}^{j} 8 \cdot 3^i = 8 \sum_{i=1}^{j} 3^i = 8 \sum_{i=0}^{j-1} 3^{i+1} = 24 \sum_{i=0}^{j-1} 3^i = 24 \frac{1-3^j}{1-3} = 12(3^j - 1)$$

usando la fórmula de suma geométrica. Finalmente,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{8^{k+1}}{3^i} = \sum_{j=1}^{n} 12(3^j - 1) = 12 \frac{3^{n+1} - 3}{3 - 1} - 12n = 18(3^n - 1) - 12n$$

P4. Fijemos un $n \geq 1$ cualquiera, y definamos el conjunto

$$R_n = \{x \in [0, +\infty) : x^n \in \mathbb{N}\}$$

Entonces podemos escribir que $C = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \ldots$. Nos basta con demostrar que cada R_n es numerable para mostrar que C también lo es.

Observar que R_n es el conjunto de todas las raíces n-ésimas de los números naturales. Es decir (recordando que todo real $x \in [0, +\infty)$ posee una única raíz n-ésima positiva $\sqrt[n]{x}$)

$$R_n = \left\{ \sqrt[n]{1},\, \sqrt[n]{2},\, \sqrt[n]{3},\, \sqrt[n]{4},\, \sqrt[n]{5}, \ldots \right\}$$

Es fácil ver que R_n es numerable (pues $f : \mathbb{N} \to R_n$ dada por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es biyectiva). De este modo, recordando que C se escribe como la unión de todos de los conjuntos R_n con $n \in \mathbb{N}$ (una cantidad numerable), concluimos que C es numerable.

P6. Opción 1: Notemos que si $x \in A$, entonces $x = \frac{p}{q}$ con $q = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y algún $p \in \mathbb{N}$ tal que $p < q$. Es decir, todos los elementos de A son racionales y entonces $A \subseteq \mathbb{Q}$. De aquí podemos concluir que el cardinal de A es menor o igual al cardinal de $\mathbb{Q}$, es decir $|A| \leq |\mathbb{Q}|$.

Además, sabemos que A es infinito pues contiene a todos los reales de la forma $\frac{1}{2^n}$ con $n \geq 1$. Por lo tanto, $|A| \geq |\mathbb{N}|$. Como $\mathbb{Q}$ es numerable se tiene que $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, y concluimos entonces que $|A| = |\mathbb{N}|$, es decir que A es numerable.

Opción 2: Tomemos un $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, y definimos el conjunto

$$B_n = \left\{ \frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n} \right\}$$

Entonces, se puede ver que $A = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots$, es decir A es una unión de una cantidad numerable de conjuntos finitos por lo que $|A| \leq |\mathbb{N}|$. Notando que A es infinito (usando el mismo argumento de la opción 1) concluimos que $|A| = |\mathbb{N}|$, es decir que A es numerable.

Una observación acerca del enunciado: recordar que hemos definido un conjunto numerable como aquél que tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$, es decir los conjuntos finitos no son numerables. En la indicación, en lugar de decir que "la unión de una cantidad numerable de conjuntos finitos o numerables es numerable" debiera decir "la unión de una cantidad numerable de conjuntos finitos o numerables es finita o numerable".

P8a. Cuidado, que en algunos enunciados vienen los siguientes errores: (1) en lugar de decir $n \leq 2$, debe decir $n \geq 2$, y (2) la sumatoria, en lugar de llegar hasta N debe llegar hasta n.

Observemos que E es el conjunto compuesto por todas las tuplas de largo al menos 2, cuyas componentes son 1's y -1's, tales que estas componentes suman 0. Por ejemplo, $(1,-1) \in E$, $(1,1) \notin E$ y $(1,-1,-1,1) \in E$

Una vez claro esto, es fácil ver que para cada $m \geq 1$, tenemos que la tupla (de largo $2m$)

$$(\underbrace{1,\ldots,1}_{m}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{m})$$

es un elemento de E. Como todas estas tuplas son distintas, obtenemos que E es infinito.

P8b. Opción 1: Fijemos un $n \geq 2$ cualquiera, y definimos el conjunto

$$E_n = \left\{ (a_1,\ldots,a_n) \in \{-1,1\}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \right\}$$

De este modo, observamos que $E = E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup \ldots$. Sabemos, además, que cada E_n es finito, pues está formado por tuplas de largo n de 1's y -1's, las cuales son a lo más 2^n. Concluimos entonces que $|E| \leq |\mathbb{N}|$.

Utilizando la parte anterior, sabemos que E es infinito y por lo tanto $|E| = |\mathbb{N}|$.

Opción 2: Sea $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ una n-tupla en E. Definimos el número racional en base decimal $\hat{a} = 0.d_1 d_2 \ldots d_n$, donde para cada i: $d_i = 1$ si $a_i = 1$ y $d_i = 2$ si $a_i = -1$ (por ejemplo, a la tupla $a = (1,-1,1,-1)$ le asociamos el decimal $\hat{a} = 0{,}1212$). Notar que $\hat{a}$ es racional pues tiene una cantidad finita de cifras decimales no nulas.

De este modo, podemos definir una función $f : E \to \mathbb{Q}$ dada por $f(a) = \hat{a}$. Esta función f es inyectiva, pues si $a = (a_1,\ldots,a_n)$ y $b = (b_1,\ldots,b_m)$ son elementos de E tales que $f(a) = f(b)$, tenemos que

$$\hat{a} = 0.d_1 d_2 \ldots d_n = 0.e_1 e_2 \ldots e_m = \hat{b}$$

Como d_i y e_i sólo toman valores 1 y 2, debe tenerse necesariamente que $m = n$ y que las tuplas a y b son iguales.

Conclusión: $|E| \leq |\mathbb{Q}|$. Usando que $\mathbb{Q}$ es numerable y que E es infinito gracias a la parte anterior, obtenemos que $|E| = |\mathbb{N}|$.