P1a. Notar que

$$\log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \log\frac{k+1}{k} = \log(k+1) - \log k$$

por lo que la suma que queremos calcular es una telescópica:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m}\log\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=n}^{m}(\log(k+1)-\log k)\\
&= \log(m+1)-\log n = \log\frac{m+1}{n}
\end{aligned}$$

P1b. Lo primero que hacemos es completar el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ usando la relación

$$\frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\binom{n}{k}$$

Así,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}$$

y sólo nos queda completar un binomio de Newton agregando los términos que faltan (los asociados a $k=0$ y $k=n$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!(n-k)!} &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\\
&= \frac{1}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\binom{n}{0}-\binom{n}{n}\right]\\
&= \frac{1}{n!}\left[(1+1)^n-1-1\right] = \frac{2^n-2}{n!}
\end{aligned}$$

P3. Para sumas de este tipo es útil tratar de "racionalizar" el denominador, en este caso multiplicando numerador y denominador por $(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})} &= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}(k-(k+1))}\\
&= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}
\end{aligned}$$

con lo cual la suma queda telescópica, y vale

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})} = \frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

P5a. Sabiendo que $f(u)=1$ y que $g(u)=u$ para todo u natural, se tiene que para cualquier n natural:

$$(f*f)(n) = \sum_{k=0}^{n}f(k)f(n-k) = \sum_{k=0}^{n}1\cdot 1 = n+1$$

$$
\begin{aligned}
(f*g)(n) &= \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) = \sum_{k=0}^{n} 1\cdot(n-k) = \sum_{k=0}^{n}(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \\
(g*g)(n) &= \sum_{k=0}^{n} g(k)g(n-k) = \sum_{k=0}^{n} k\cdot(n-k) = n\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

P5b. Si ahora $f(u) = \frac{a^u}{u!}$ y $g(u) = \frac{b^u}{u!}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
n!(f*g)(n) &= n!\sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n
\end{aligned}
$$

P7. Como primera cosa, observemos que la suma en realidad parte desde $k=1$, pues el término asociado a $k=0$ vale 0. Luego, la idea en este tipo de sumas es cargarle el factor k al número combinatorio, del modo siguiente:

$$
k\binom{n}{k} = \frac{n!\cdot k}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}
$$

(notar que para que un cuociente $\frac{a!}{b!c!}$ sea igual a un número combinatorio, debe cumplirse que $a = b+c$)

Utilizando esta igualdad, podemos escribir

$$
\sum_{k=0}^{n} k7^k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k7^k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n} 7^k\binom{n-1}{k-1}
$$

Llamemos S a esta suma que estamos calculando. Realizando un corrimiento del índice de la suma podemos luego formar un binomio de Newton:

$$
S = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}7^{k+1} = 7n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}7^k = 7n(7+1)^{n-1} = 7n\cdot 8^{n-1}
$$