P1. Probar que para todo natural mayor o igual que 1 se tiene

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6} \tag{1}$$

Demostración. Por inducción.

El caso base es $n = 1$. Calculemos el valor de la suma asociada:

$$\sum_{k=1}^{1+1} \frac{1}{1+k} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

por lo que el caso base es verdadero.

Hipótesis inductiva: Supongamos que (1) es cierta para algún $n \geq 1$. Demostrémoslo ahora para $n + 1$.

Calculemos:

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{(n+1)+1} \frac{1}{(n+1)+k} &= \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+k+1} \\ &= \frac{1}{n+(n+2)+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} \\ &= \frac{1}{2n+3} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} \end{aligned}$$

Para poder utilizar la hipótesis inductiva, vamos a sumar y restar la sumatoria que aparece en (1). De este modo,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2n+3} + \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \right) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{2n+3} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{n+k+1} - \frac{1}{n+k} \right) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \end{aligned}$$

Notamos que la primera sumatoria es telescópica, por lo cual nos queda

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2n+3} + \left(\frac{1}{n+(n+1)+1} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq 0 + \frac{5}{6} \end{aligned}$$

donde usamos la hipótesis inductiva y el hecho que el primer sumando es negativo. Por lo tanto (1) también vale para $n+1$.

Otra forma de realizar el cálculo final: notemos que la hipótesis inductiva puede reescibirse como

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \leq \frac{5}{6} \tag{2}$$

Hacemos la misma reescritura para S:

$$S = \sum_{k=1}^{(n+1)+1} \frac{1}{(n+1)+k} = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+k+1} = \sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{1}{k}$$

y ahora sumamos y restamos términos de modo de hacer aparecer (2):

$$S = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{n+1}$$

y se concluye del mismo modo anterior.