

Pauta Control Recuperativo, MA1001 Introducción al Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/1 (26 de Mayo)

P1) Ordenando la inecuación se escribe como

$$|x||x-2| + x|x+3| \geq 3$$

Los puntos críticos de las expresiones de primer grado dentro de los módulos son 0, 2 y -3.

1 pto.

Caso 1 En el intervalo $(-\infty, -3)$ la inecuación se reescribe como

$$(-x)(-(x-2)) + x(-(x+3)) \geq 3$$

Es decir

$$-5x \geq 3, \quad \text{o sea } x \leq -\frac{3}{5}$$

Por lo tanto, la solución de la inecuación en $\mathbb{R}$ es $(-\infty, -\frac{3}{5}]$.

En el intervalo considerado, la solución es $(-\infty, -3)$ 1 pto.

Caso 2 En el intervalo $[-3, 0)$ la inecuación se reescribe como

$$(-x)(-(x-2)) + x(x+3) \geq 3$$

Es decir

$$2x^2 + x - 3 \geq 0$$

Esta cuadrática tiene las raíces

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

por lo tanto, la solución de la inecuación en $\mathbb{R}$ es $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)$.

En el intervalo considerado, la solución es $[-3, -\frac{3}{2}]$ 1 pto.

Caso 3 En el intervalo $[0, 2)$ la inecuación se reescribe como

$$x(-(x-2)) + x(x+3) \geq 3$$

Es decir

$$5x \geq 3, \quad \text{o sea } x \geq \frac{3}{5}$$

Por lo tanto, la solución de la inecuación en $\mathbb{R}$ es $[\frac{3}{5}, \infty)$.

En el intervalo considerado, la solución es $[\frac{3}{5}, 2)$ 1 pto.

Caso 4 En el intervalo $[2, \infty)$ la inecuación se reescribe como

$$x(x-2) + x(x+3) \geq 3$$

Es decir

$$2x^2 + x - 3 \geq 0$$

Esta cuadrática tiene las raíces

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

por lo tanto, la solución de la inecuación en $\mathbb{R}$ es $(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)$.

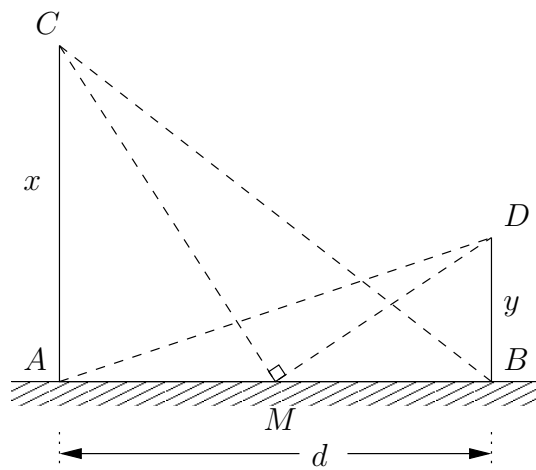
En el intervalo considerado, la solución es $[2, \infty)$ 1 pto.

Finalmente, la solución de la inecuación con módulo original es

$$(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{5}, \infty)$$

..... 1 pto.

P2) .



Como $\angle CBA = 2\angle DAB$ se tiene que $\tan(\angle CBA) = \tan(2\angle DAB)$ por lo tanto

$$\frac{x}{d} = \frac{2\frac{y}{d}}{1 - (\frac{y}{d})^2}$$

es decir,

$$x = \frac{2d^2y}{d^2 - y^2}$$

..... 2 ptos.

Además el ángulo $\angle CMD$ es recto, luego $\tan(\angle MCA) = \tan(\angle DMB)$, es decir,

$$\frac{d/2}{x} = \frac{y}{d/2}$$

de donde, ordenando se tiene

$$x = \frac{d^2}{4y}$$

..... 2 ptos.

Usando las dos relaciones encontradas se obtiene $y = \frac{d}{3}$ y $x = \frac{3d}{4}$ 2 ptos.

P3)

$$A = \{ ax + by ; |x| + |y| \leq 1 \}.$$

a) Tomando los reales $x = 1$ e $y = 0$ se obtiene $ax + by = a \in A$.

Tomando los reales $x = 0$ e $y = 1$ se obtiene $ax + by = b \in A$.

Tomando los reales $x = -1$ e $y = 0$ se obtiene $ax + by = -a \in A$.

Tomando los reales $x = 0$ e $y = -1$ se obtiene $ax + by = -b \in A$ 1 pto.

Como $a, -a \in A$ entonces $|a| \in A$.

Como $b, -b \in A$ entonces $|b| \in A$ 0.5 pto.

Como $|a|, |b| \in A$ entonces $\max\{|a|, |b|\} \in A$ 0.5 pto.

b) Todos los reales de A satisfacen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} ax + by &\leq |ax + by| \\ &\leq |a||x| + |b||y| \end{aligned}$$

Primera cota: Como $|x| + |y| \leq 1$ entonces $|x| \leq 1$ y también $|y| \leq 1$ por lo tanto

$$\begin{aligned} ax + by &\leq |a||x| + |b||y| \\ &\leq |a| + |b|. \end{aligned}$$

..... 1 pto.

Segunda cota: Como $|a| \leq \max\{|a|, |b|\}$ y $|b| \leq \max\{|a|, |b|\}$, entonces

$$\begin{aligned} ax + by &\leq |a||x| + |b||y| \\ &\leq \max\{|a|, |b|\}|x| + \max\{|a|, |b|\}|y| \\ &\leq \max\{|a|, |b|\}(|x| + |y|) \\ &\leq \max\{|a|, |b|\} \end{aligned}$$

..... 1 pto.

c) Como $\max\{|a|, |b|\}$ pertenece al conjunto A y es cota superior entonces es el máximo del conjunto. 1 pto.

Como el máximo existe entonces el supremo es igual a dicho valor. 1 pto.

P4) Usando la definición de convergencia, sabemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_0, \forall n \geq n'_0, \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$$

y

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n''_0, \forall n \geq n''_0, \ell - \varepsilon \leq b_n \leq \ell + \varepsilon.$$

..... 2 ptos.

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ y arbitrario, tomamos $n_0 = \max\{n'_0, n''_0\}$ y así, $\forall n \geq n_0$ se cumple simultaneamente que

$$\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon \quad \text{y} \quad \ell - \varepsilon \leq b_n \leq \ell + \varepsilon.$$

..... 2 ptos.

Con esto se tiene que

$$\ell - \varepsilon \leq \max\{a_n, b_n\} \leq \ell + \varepsilon$$

..... 2 ptos.