



P1 Resolver la ecuación trigonométrica

$$\cos(2x) + \cos(-x) = 0$$

Solución: usaremos la siguiente fórmula conocida:

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad \cos(u) + \cos(v) = 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

Aplicando esta fórmula a la ecuación, obtenemos:

$$\cos\left(\frac{2x+(-x)}{2}\right) \cos\left(\frac{2x-(-x)}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \vee \quad \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$$

Analizamos estos dos casos por separado:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Luego, el conjunto de soluciones de la ecuación es

$$S = \left\{ \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

P2

Demostrar que $\forall x \neq k\pi$ se cumple que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{\operatorname{Sen}(x)}$$

Solución: usaremos varias fórmulas:

$$(1) \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$(2) \quad \cos(\alpha) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$(3) \quad \operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$(4) \quad \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$(1) \text{ y } (2) \rightarrow = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi+x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}$$

$$(4) \rightarrow = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x)}{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi+(-x)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi-(-x)}{2}\right)}$$

$$(3) \rightarrow = \frac{-1 + \cos(x)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}(-x)}$$

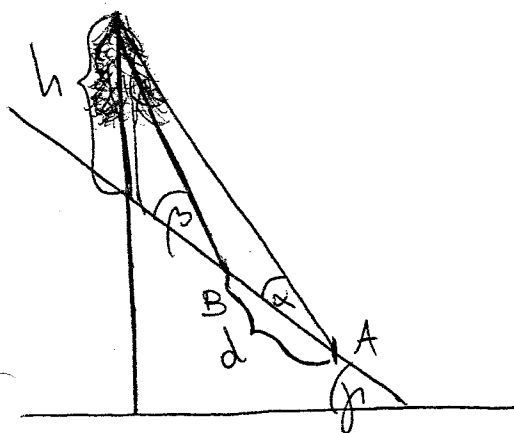
$$= \frac{-1 + \cos(x)}{0 - \operatorname{sen}(x)}$$

$$= \frac{1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

P3

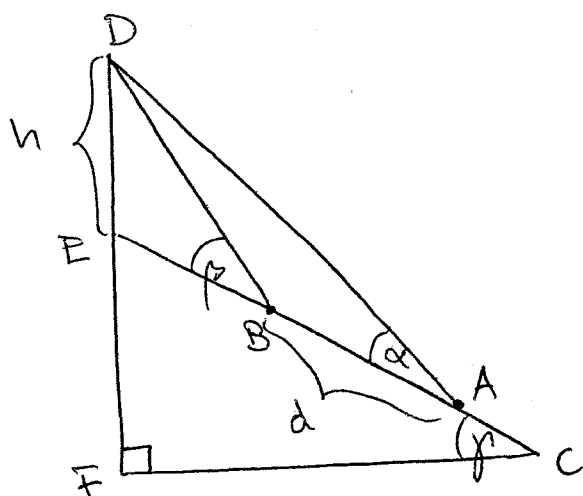
Se necesita conocer la altura de un árbol ubicado en la ladera de un cerro. Para esto se ubican dos puntos A y B sobre la ladera (A más abajo que B) a una distancia d y colineales con la base del árbol. Los ángulos de elevación desde A y B hasta la cuspide del árbol son α y β respectivamente, y el ángulo de inclinación de la ladera es γ . Calcular la altura del árbol en función de los datos α , β , γ y d .

Solución: en este tipo de problemas hacer un monito es obligación!!!



La estrategia es ir ocupando el teorema del seno para ir obteniendo el valor de nuevos ángulos y lados, hasta llegar a conocer h .

Hacemos un dibujo más esquemático:



$$\angle DBA = \pi - \beta$$

$$\Rightarrow \angle BDA = \pi - ((\pi - \beta) + \alpha) = \beta - \alpha$$

Por teorema del seno:

$$\frac{\sin(\angle BDA)}{d} = \frac{\sin(\alpha)}{|BD|}$$

$$\Rightarrow |\overline{BD}| = \frac{d \operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\angle FEC = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$\Rightarrow \angle B = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \\ = \frac{\pi}{2} + \gamma$$

Por teo. del seno nuevamente, sabemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(\angle DEB)}{|\overline{BD}|} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{h}$$

$$\Rightarrow h = \frac{|\overline{BD}| \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)} \\ = \frac{d \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)}$$

$$h = \frac{d \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha) \cos(\gamma)}$$

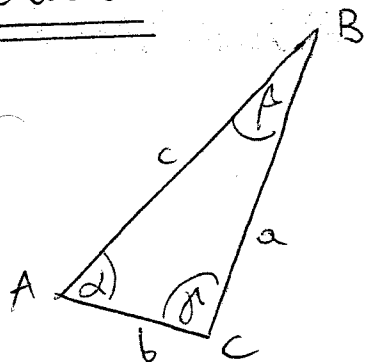
P4

En un triángulo ABC de lados a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ se cumple que

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen}(\alpha - \beta)}$$

Demuestre que en tal caso el triángulo necesariamente es rectángulo.

Solución: el monito es:



Para relacionar los lados con los ángulos tenemos los teoremas del seno y del coseno:

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\text{sen}(\beta)}{b} \quad (\text{TEO (SENO)})$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen}(\alpha - \beta)} &= \frac{\text{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \text{sen}(\beta) \cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha) \cos(\beta) - \text{sen}(\beta) \cos(\alpha)} \\ &= \frac{\frac{a}{b} \text{sen}(\beta) \cos(\beta) + \text{sen}(\beta) \cos(\alpha)}{\frac{a}{b} \text{sen}(\beta) \cos(\beta) - \text{sen}(\beta) \cos(\alpha)} \\ &= \frac{a \cos(\beta) + b \cos(\alpha)}{a \cos(\beta) - b \cos(\alpha)} \end{aligned}$$

Por teo. coseno sabemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

despejando $2bc \cos(\alpha)$ y $2ac \cos(\beta)$ y reemplazando, obtendremos:

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{2ac \cos(\beta) + 2bc \cos(\alpha)}{2ac \cos(\beta) - 2bc \cos(\alpha)}$$

$$= \frac{a^2 + c^2 - b^2 + b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2 - (b^2 + c^2 - a^2)}$$

$$= \frac{2c^2}{2a^2 - 2b^2} = \frac{c^2}{a^2 - b^2}$$

Hipótesis $\leadsto$
$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

Simplificando los $a^2 - b^2$ se obtiene:

$$a^2 + b^2 = c^2 \stackrel{\text{Teo coseno}}{=} a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

$$\Rightarrow \cancel{a^2} + \cancel{b^2} = \cancel{a^2} + \cancel{b^2} - 2ab \cos(\gamma)$$

$$\Rightarrow \cos(\gamma) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ algún } k \in \mathbb{Z}$$

Pero como γ representa un ángulo DENTRO DE UN TRIÁNGULO, $\gamma \in [0, \pi]$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma \text{ es ángulo recto}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ es rectángulo} //$$