

Sobre las ecuaciones trigonométricas

24 de abril de 2007

Cuando se presentan ecuaciones del tipo $\sin(x) = a$ o $\cos(x) = a$, las soluciones están dadas por los siguientes conjuntos (respectivamente)

$$\{(-1)^k \alpha_1 + k\pi/k \in \mathbb{Z}\} \text{ y } \{\pm\alpha_2 + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$$

Aquí, $\alpha_1 = \arcsin(a)$ y $\alpha_2 = \arccos(a)$. Esta es la forma general para resolverlas.

En la pauta de la P1, no se ocupó esta fórmula al momento de encontrar los ceros de la función. Verifiquen que se obtiene el mismo resultado al ocupar estas fórmulas. Ahora bien, el argumento que se ocupó en la pauta, sólo sirve para los valores extremos, es decir, cuando $a = \pm 1$, así que tengan cuidado.

Otra cosa, aparece en la P2 parte (a) la ecuación $\cos(x) + \sin(x) = 1$. Una forma de resolverla es decir, sea $\cos(x) = t$, entonces la ecuación queda $t + \sqrt{1-t^2} = 1$, que tiene por solución $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Eso les da un conjunto de valores. Sin embargo, ustedes podrían haber dicho $\sin(x) = t$, que los llevaría a la misma ecuación, pero con un conjunto distinto de valores como solución.

Para decidir correctamente cual es la solución, no tienen que perder de vista, que lo que quieren al final, es resolver la ecuación $\cos(x) + \sin(x) = 1$, así que el conjunto de valores que es solución, son todos los valores que satisfacen la ecuación (que resulta ser la intersección de los dos conjuntos de valores).

Lo que ocurre es que dijimos si $\cos(x) = t$, entonces $\sin(x) = \sqrt{1-t^2}$. Esto sale de la relación $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Luego decir que $\sin(x) = \sqrt{1-t^2}$, no es correcto. Lo correcto es decir que $|\sin(x)| = \sqrt{1-t^2}$, o sea, $\sin(x) = \pm\sqrt{1-t^2}$. Lo que hacemos en ese caso para resolver la ecuación $t \pm \sqrt{1-t^2} = 1$, es dejar la raíz a un lado y elevar al cuadrado, con lo que eliminamos el \pm y la raíz. Cuando hacemos esto, estamos relajando la ecuación por lo que es posible que se cuenten soluciones. Pues bien, seguramente esto ya les ha pasado, y la mejor forma de verificar cuales son las soluciones que realmente me sirven, es recordando cual es el problema original, ver cuales son las soluciones que lo satisfacen y eliminar las que se colaron.