P2.- Estudie completamente la función

$$f(x) = |\sqrt{|x|} - x|.$$

Para ello:

(i) Encuentre dominio, ceros. Estudie epiyectividad, inyectividad. Demuestre que su recorrido es el conjunto $\{y \in \mathbb{R},\ y \geq 0\}$.

(ii) Analice el crecimiento de la función **sin módulo** $\sqrt{|x|} - x$ para $x > 1/4$, $0 < x < 1/4$ y $x < 0$. Indicación: note que si $x > y > 1/4$ entonces $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 1$.

(iii) Estudie el crecimiento de $|\sqrt{|x|} - x|$ analizando los signos de $\sqrt{|x|} - x$.

(iv) Haga un gráfico aproximado de f que resuma el análisis precedente.

Pauta.- **(i)** El dominio es todo $\mathbb{R}$ **[0/0.25pto]**, los ceros son las soluciones de $\sqrt{|x|} = x$, esto es $x = 0$ y $x = 1$ **[0/0.25pto]**. No es epiyectiva pues los $y < 0$ no tienen preimagen **[0/0.25pto]**. No es inyectiva pues tiene dos ceros **[0/0.25pto]**. Si $y \geq 0$ entonces buscamos una preimagen x tal que $f(x) = y$, por ejemplo busquemos un $x \geq 1$, como $\sqrt{|x|} - x \leq 0$ luego debemos resolver $\sqrt{x} - x = -y$ esto es $\sqrt{x} = x - y$ o bien $x = x^2 - 2xy + y^2$, que es la ecuación $x^2 - (2y+1)x + y^2 = 0$, cuya solución existe en los reales si $(2y+1)^2 - 4y^2 \geq 0$ lo cual es cierto pues $4y + 1 > 0$ **[0/0.5/1pto]**.

(ii) Crecimiento de $\sqrt{|x|} - x$. Si $x > y > 1/4$ entonces $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 1$, multiplicamos por $\sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$ y queda $x - y > \sqrt{x} - \sqrt{y}$ de donde $\sqrt{|x|} - x < \sqrt{|y|} - y$ por lo que $\sqrt{|x|} - x$ es decreciente si $x > 1/4$ **[0/0.5/1pto]**. Si ahora $0 < y < x < 1/4$ entonces $\sqrt{x} + \sqrt{y} < 1$, multiplicamos por $\sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$ y queda $x - y < \sqrt{x} - \sqrt{y}$ de donde $\sqrt{|x|} - x > \sqrt{|y|} - y$ por lo que $\sqrt{|x|} - x$ es creciente si $0 < x < 1/4$ **[0/0.25/0.5pto]**. Finalmente, si $x < 0$, entonces $\sqrt{|x|} - x = \sqrt{|x|} + |x|$ y es decreciente por ser suma de dos funciones decrecientes para $x > 0$ **[0/0.25/0.5pto]**.

(iii) Signos de $\sqrt{|x|} - x$. Si $0 < x < 1$ entonces $\sqrt{|x|} - x > 0$, si $x < 0$ entonces $\sqrt{|x|} - x > 0$ y si $x > 1$ entonces $\sqrt{|x|} - x < 0$ **[0/0.25/0.5pto]**. Del punto **(i)** se deduce que el crecimiento de $|\sqrt{|x|} - x|$ se invierte si $x > 1$, esto es decreciente si $x < 0$, creciente si $0 < x < 1/4$, decreciente si $1/4 < x < 1$ y creciente si $x > 1$ **[0/0.25/0.5pto]**.

(iv) La información de los puntos precedentes se puede resumir en el gráfico siguiente: **[0/0.25/0.5/0.75/1pto]**