Auxiliar #4 MA12A

Miguel Angel Carrasco.

1 Resumen

1.1 Derivadas de Orden Superior

Se define la derivada de orden n en forma inductiva como sigue

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$
$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

Notación: $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$ o bien $\frac{d^n y}{dx^n}$

Ejemplos

- $y = x^n$

  $$y^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$$

  Si $k > n$ la derivada k-esima es 0
- $y = e^{-ax}$

  $$y^{(n)} = (-1)^n e^{ax} a^n$$
- $y = \operatorname{sen} x$

  $$(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$
- $y = \cos x$

  $$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

1.2 Fórmula de Leibnitz

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

1.3 Recta Tangente y Normal

- Tangente: $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$ con $y_0' = f'(x_0)$
- Normal: $y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0)$ cuando $f'(x_0) \neq 0$

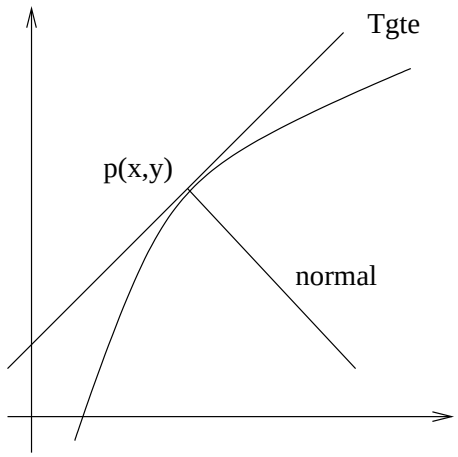


Figura 1: Rectas Tangente y normal a una curva en el punto $P(x, y)$

2 Problemas

P1. Demuestre que la recta tangente a la curva

$$x^2 + y^2 = e^{2k \arctan \frac{y}{x}}$$

k constante, por un punto $P(x_0, y_0)$ de ella, forma un ángulo constante con la recta que une P con el origen.

P2. Sea $f(x) = x \cos x - \operatorname{sen} x$

1. Calcular $f^{(n)}(x)$
2. Demostrar que

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln(x) - 1 - \frac{1}{2} \cdots - \frac{1}{n}\right]$$

Ind: Calcule previamente $\left(\frac{1}{x}\right)^{(p)}$ y $(\ln x)^{(p)}$

P3. Sea $f(x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$ donde $a > 0$ y $|x| < a$
Calcular $f^{(n)}(x)$ y luego $f^{(n)}(0)$ para los casos n par y n impar.

3 Soluciones

P1. Demuestre que la recta tangente a la curva

$$x^2 + y^2 = e^{2k \arctan \frac{y}{x}}$$

k constante, por un punto $P(x_0, y_0)$ de ella, forma un ángulo constante con la recta que une P con el origen.

Sol: Calculemos y'

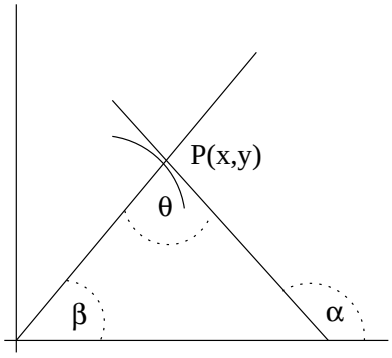
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= e^{2k \arctan \frac{y}{x}} \quad \Big| \frac{d}{dx} \\ (x + yy') &= k(y'x - y) \end{aligned}$$

luego $y' = \frac{x+ky}{kx-y}$
En el punto $P(x_0, y_0)$ tenemos

$$L1: \ y - y_0 = y'(x_0, y_0)(x = x_0) \ \text{ recta tangente.}$$

y

$$L2: \ y = \frac{y_0}{x_0} x \ \text{ recta que une } P \text{ con el origen}$$



Notemos que

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= y'(x_0, y_0) = \frac{x_0 + ky_0}{kx_0 - y_0} \\ \tan(\beta) &= \frac{y_0}{x_0} \end{aligned}$$

$\theta = \alpha - \beta$ pero

$$\tan(\theta) = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

desarrollando

$$\tan(\theta) = \frac{x_0^2 + y_0^2}{kx_0^2 + ky_0^2} = \frac{1}{k}$$

finalmente $\theta = \arctan(\frac{1}{k})$

P2. Sea $f(x) = x\cos x - \operatorname{sen} x$

1. Calcular $f^{(n)}(x)$
2. Demostrar que

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln(x) - 1 - \frac{1}{2} \cdots - \frac{1}{n}\right]$$

Ind: Calcule previamente $\left(\frac{1}{x}\right)^{(p)}$ y $(\ln x)^{(p)}$

Sol:

1. $f^{(n)}(x) = (x\cos x)^{(n)} - (\operatorname{sen} x)^{(n)}$ Calculemos por separado ambas derivadas. Por la *fórmula de Leibnitz* se tiene que

$$\begin{aligned}(x\cos x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(k)}(\cos x)^{(n-k)} \\ &= x(\cos x)^{(n)} + n(\cos x)^{(n-1)}\end{aligned}$$

y como $(\cos x)^{(n)} = \cos(\frac{n\pi}{2} + x)$ y $(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2} + x)$ se obtiene

$$f^{(n)}(x) = x\cos(\frac{n\pi}{2} + x) + n\cos(\frac{n\pi}{2} + x) - \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2} + x)$$

2.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(p)} = \frac{(-1)^p p!}{x^{p+1}} \quad \text{y } (\ln x)^{(p)} = \frac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{x^p}$$

Sabiendo esto y utilizando la *fórmula de Leibnitz*

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)} \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}\ln x + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}\cdot\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\ln x + \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(n-k)!(k-1)! \\ &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\ln x + \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}(n-k)!(k-1)! \\ &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\ln x + \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]\end{aligned}$$

P3. Sea $f(x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$ donde $a > 0$ y $|x| < a$

Calcular $f^{(n)}(x)$ y luego $f^{(n)}(0)$ para los casos n par y n impar.

Sol: notemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \\ &= \ln(a+x) - \ln(a-x) \end{aligned}$$

ademas

$$f^{(n)}(x) = (\ln(a+x))^{(n)} - (\ln(a-x))^{(n)}$$

notando que $(\ln(a+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(a+x)^n}$ y $(\ln(a-x))^{(n)} = (-1)^n\frac{(n-1)!}{(a-x)^n}$ con $n \geq 1$ se obtiene el resultado.

4 Problemas Propuestos

- 1. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$e^{2\,\mathrm{arcsen}\,yx} = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto P donde la curva corta al eje de las abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva ($x > 0$).

2. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable con $g'(x) \neq 0$ en todo $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \cos(kg(x))$$

(a) Muestre que f, f', f'', g, g', g'' satisfacen la relación

$$f'' - f'\frac{g''}{g'} + (kg')^2 f = 0$$

(b) calcule $f^{(n)}(0)$ para $g(x) = x$.

- 1. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$\ln(\frac{3}{4} + x^2 + y) = \mathrm{sen}(xy)$$

en el punto P donde la curva corta al eje de las abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva ($x > 0$).

2. Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x\cosh x})$$

3. Sea f definida y continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre $]a, b[$, con $0 < a < b$. Suponga que $f(a) = f(b) = 0$. Mostrar que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

- Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln(x)}{x-1} & x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

1. Determine el valor de α para que f sea continua en $\mathbb{R}_+^*$.
2. Analice la existencia de $f'(x)$ para $x > 0$. En caso de existir, calcule f'.
3. Determine los puntos de continuidad de f' en $]0, \infty[$.
4. Asuma que $f^{(n)}$ existe para $n \geq 2$ y que es continua en 1. calcule una recurrencia para $f^{(n)}(1)$, utilizando la fórmula de Leibnitz para $(x - 1)f(x)$.

5 Anexo: Aplicaciones Físicas

P1. La viela y la manivela. Calcular $v(x)$, ω constante.

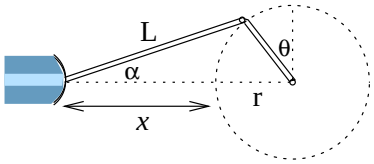


Figura 2: Notemos que $x = x(t)$, $\theta = \theta(t)$

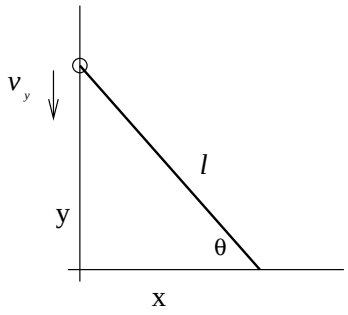
Sol:

$$L^2 = (x + R(1 - \operatorname{sen} x))^2 + (R\cos\theta)^2 \qquad \Big|\frac{d}{dt}$$
$$0 = 2(x + R(1 - \operatorname{sen} x))[v(x) + R\cos\theta\omega] + R^2 2\cos\theta(-\operatorname{sen}\theta)\omega$$

finalmente

$$v(x) = \frac{R^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\omega}{x - R(1 - \operatorname{sen}\theta)} - R\cos\theta\omega$$

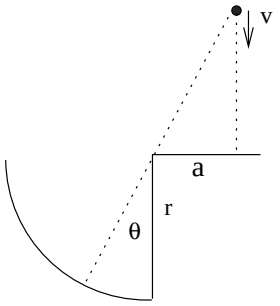
P2. Problema de la escalera



Sol:

$$\begin{aligned} l^2 &= x^2 + y^2 \qquad \Big|\frac{d}{dt} \\ 0 &= 2xv_x + 2yv_y \\ v_x &= -\frac{yv_y}{x} \end{aligned}$$

P3. A que velocidad crece el área en penumbra



Sol:
Buscamos $\frac{dA}{dt}$ donde A corresponde al área en penumbra
$\tan\theta = \frac{a}{y} \rightarrow \theta = \arctan(a/y)$

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\theta R^2}{2} \\
\frac{dA}{dt} &= \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt} \\
\therefore \quad \frac{dA}{dt} &= \frac{avR^2}{2(a^2+(y_0-v)^2)}
\end{aligned}
$$