Funciones Hiperbólicas

Miguel Angel Carrasco.

1 Descripción

Ciertas combinaciones de e^x y e^{-x} aparecen con tanta frecuencia que han sido estudiadas como funciones por derecho propio.

El coseno y el seno hiperbólicos se definen, respectivamente como las partes par e impar de la función exponencial:

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\\ \operatorname{senh}(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\\ \tanh(x) &= \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}\end{aligned}$$

- Dominio:
$$\operatorname{Dom}(\cosh) = \operatorname{Dom}(\operatorname{senh}) = \mathbb{R}$$
- Paridad:
  - $\cosh(x)$ es par.
  - $\operatorname{senh}(x)$ es impar.
- Signos:
  - $\cosh(x) > 0$ siempre.
  - $\operatorname{senh}(x) \geq 0$ ssi $x \geq 0$.

Ademas $\cosh(0) = 1$ y $\operatorname{senh}(0) = 0$.

2 Propiedades

1. $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

2. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

3. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

4. $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx)$

Demostración:

1. $\operatorname{senh}(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$ por otra parte

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= 2\frac{(e^x e^y - e^{-x} e^{-y})}{4} \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}
\end{aligned}$$

2. análoga a la anterior

3. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ notemos que:

$$\begin{aligned}
\cosh(x) + \operatorname{senh}(x) &= e^x \\
\cosh(x) - \operatorname{senh}(x) &= e^{-x}
\end{aligned}$$

multiplicando las dos ecuaciones anteriores se obtiene el resultado pedido.

Nota: $\operatorname{senh}(x), \cosh(x)$ y $\tanh(x)$ son continuas en $\mathbb{R}$ por álgebra de funciones continuas.

3 Derivada de las funciones hiperbólicas

1. $(\operatorname{senh}(x))' = \frac{e^x-(-e^{-x})}{2} = \cosh(x)$.

2. $(\cosh(x))' = \frac{e^x+(-e^{-x})}{2} = \operatorname{senh}(x)$.

Como $\cosh(x) \geq 0 \ \forall x$, tenemos entonces que $\operatorname{senh} x$ es creciente pues su derivada es positiva: ver figura 1

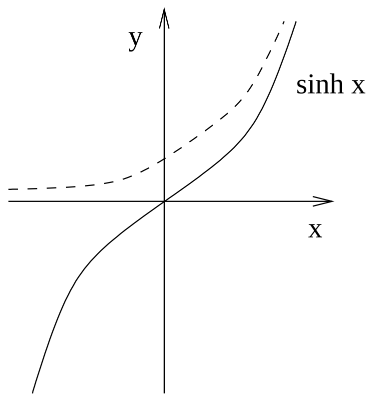

Figura 1: Notemos que si $x \to \infty$ entonces $\operatorname{senh}(x) \approx \frac{e^x}{2}$

Análogamente $\cosh(x)$ es creciente para $x > 0$ y decreciente para $x < 0$: ver figura 2

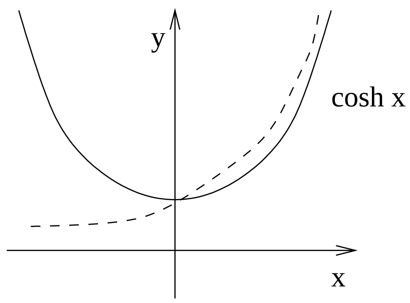

Figura 2: Gráfico de la función $\cosh(x)$ (La Catenaria)

4 Derivada de las funciones hiperbólicas inversas

Recordemos la formula:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

con esto

- $(\arg\operatorname{senh} x)' = \frac{1}{\operatorname{senh}'(\arg\operatorname{senh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\arg\cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $(\arg\tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}$

Consideremos el círculo $x^2 + y^2 = 1$ notemos que podemos definir en función del área $a/2$ el seno y el coseno trigonométrico: ver figura 3

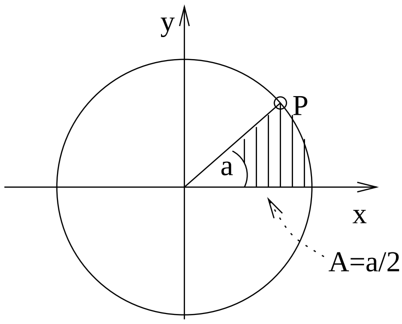

Figura 3: el punto P posee coordenadas $(\cos(a), \operatorname{sen}(a))$

Ahora si tomamos la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ tambien podemos definir en función del área $a/2$ un punto tiene coordenadas $\cosh(a), \operatorname{senh}(a)$: ver figura 4

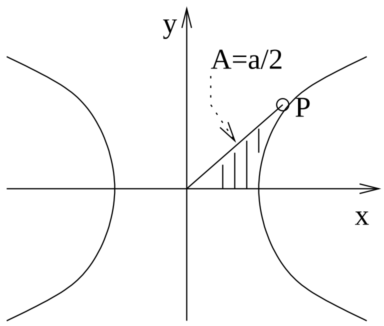

Figura 4: el punto P posee coordenadas $(\cosh(a), \operatorname{senh}(a))$