



Escuela de Ingeniería. FCFM-U. de Chile.  
CÁLCULO MA-12A  
Guía de Problemas de Trigonometría, 2003

**P1.-** Demuestre que  $\tan$  es  $\pi$ -periódica.

**Solución:**

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \pi) &= \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} \\ &= \tan \alpha \quad \forall \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

**P2.-** Encontrar  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  en función de  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t$ , para  $\alpha \neq \pi + 2k\pi$   $k \in \mathbb{Z}$ .

**Solución:** Notemos que

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}.\end{aligned}$$

Ya tenemos  $\tan \alpha$  en función de  $t$ , a partir de esto calculemos  $\cos \alpha$  y  $\sin \alpha$ .

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.\end{aligned}$$

notando que  $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$  se obtiene que

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \\ \sin \alpha &= \tan \alpha \cos \alpha = \frac{2t}{1 + t^2} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ &= \frac{2t}{1 + t^2}.\end{aligned}$$

**P3.-** (Propuesto) Demostrar que

$$\alpha, \beta \in [0, \pi/2[ \Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = t.$$

**P4.-** (Propuesto)

a) Demostrar las fórmulas de transformación

$$(1) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$(2) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$(3) \quad \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$(4) \quad \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$(5) \quad \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

b) Utilizar lo anterior para demostrar que  $(f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) (k \in \mathbb{Z})$

$$(6) \quad \cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + 2k\pi \vee f(x) = -g(x) + 2k\pi$$

$$(7) \quad \operatorname{sen} f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + 2k\pi \vee f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$$

$$(8) \quad \tan f(x) = \tan g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x), g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

**P5.-** Resolver aplicando 4

$$\operatorname{sen} 2x = \cos \frac{x}{2}$$

Graficar las soluciones en el círculo geométrico. ¿Es  $\frac{3\pi}{5}$  solución?

**Solución:** notemos que  $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$ , utilizando esto y aplicando los resultados de 4 se obtiene:

$$\operatorname{sen} 2x = \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

lo que implica

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + 2k\pi & \vee & \quad 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{i.e. } x &= \frac{\pi}{5} - \frac{4\pi}{5}k & \vee & \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

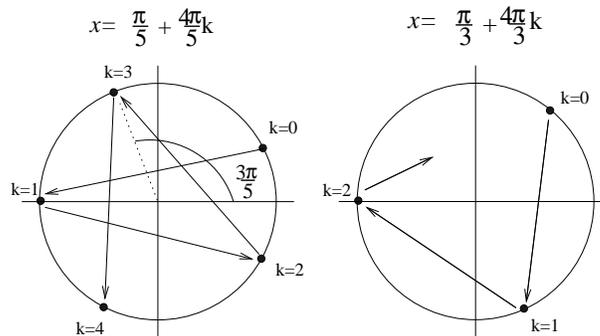


Figura 1: notemos que las soluciones nunca pasan por  $\frac{3\pi}{5}$  sino que por ángulos *coincidentes* con  $\frac{3\pi}{5}$ .

**Nota:** observemos entonces que si un ángulo es solución de una ecuación trigonométrica, un ángulo coincidente con dicha ecuación puede *NO* satisfacer la ecuación.

**P6.-** (Propuesto) Resolver  $\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) = \cos^2(x + \frac{\pi}{3})$ .

**P7.-** Probar que son iguales como funciones de  $x \geq 0$

$$\arcsen \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} \quad \text{con } a > 0.$$

**Solución:** veamos si las funciones están bien definidas

Dado  $x \geq 0$  luego  $x + a > 0$ , además,  $x < x + a \Rightarrow \frac{x}{x+a} < 1$  luego  $0 \leq \frac{x}{x+a} < 1$  (está dentro del dominio de arcsen.)

Para  $x \geq 0$  y  $a > 0$  se tiene que  $\frac{x}{a} \geq 0$  (está dentro del dominio de arctan.)

Como  $\arcsen[0, 1[ = [0, \frac{\pi}{2}[$  y  $\arctan[0, \infty[ = [0, \frac{\pi}{2}[$  las funciones compuestas:

$$\arcsen \sqrt{\frac{\cdot}{\cdot+a}} : [0, \infty[ \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}[ \quad \arctan \sqrt{\frac{\cdot}{a}} : [0, \infty[ \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}[$$

tienen igual dominio y conjunto de llegada.

Probemos que

$$\arcsen \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} \quad \text{con } a > 0,$$

a través de una cadena de equivalencias:

Recordemos antes que

- si  $\alpha, \beta \in [0, \pi/2[$  entonces  $\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = \beta$  pues sen es una función inyectiva en  $[0, \pi/2[$ .
- $\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow \sin(\arctan a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

Veamos

$$\begin{aligned} \arcsen \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} &\Leftrightarrow \sin \left( \arcsen \sqrt{\frac{x}{x+a}} \right) = \sin \left( \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} \right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \frac{\sqrt{\frac{x}{a}}}{\sqrt{1 + (\sqrt{\frac{x}{a}})^2}} &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \frac{\sqrt{\frac{x}{a}}}{\sqrt{\frac{x+a}{a}}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \sqrt{\frac{x}{x+a}} \end{aligned}$$

**P8.-** (Propuesto) Calcular

$$y = \sin \left( \arcsen \left( \frac{1}{1+a^2} \right) + \arccos \left( \frac{1}{1+a^2} \right) \right)$$

**P9.-** Utilice 4 para probar que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

**Solución:** Por el problema 4 sabemos que

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

pero como tan es una función impar se sigue que  $\tan(-\beta) = -\tan \beta$  y como cos es una función par  $\cos(-\beta) = \cos \beta$  luego:

$$\begin{aligned} \tan \alpha - \tan \beta &= \tan \alpha - \tan -\beta = \frac{\sin(\alpha - (-\beta))}{\cos \alpha \cos \beta} \\ &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \end{aligned}$$

(En resumen  $\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ ) luego si  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  entonces

$$\tan \alpha + \tan(\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos \alpha \cos(\beta + \gamma)} = 0$$

de esta forma

$$\tan \alpha + \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma} = 0 \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma.$$

**P10.-** a)  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$

b) Mostrar que  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$

c) Resolver  $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$

**Solución:**

a) Sea  $a = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ,  $b = \frac{\alpha - \beta}{2}$  luego  $\alpha = a + b$  y  $\beta = a - b$  reemplazando

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \cos(a + b) + \cos(a - b) \\ &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ &= 2 \cos a \cos b = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \end{aligned}$$

b)  $\cos 2x = \cos(x + x)$  luego

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

c) Notemos que por la parte (a) se tiene que

$$\cos 3x + \cos x = 2 \cos\left(\frac{3x + x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x - x}{2}\right)$$

y de la parte (b)

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

luego la ecuación

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

es equivalente a resolver

$$2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x = 0$$

factorizando por  $\cos x$  y utilizando nuevamente la parte (a)

$$\cos x(\cos x + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}\right) = 0$$

por lo tanto  $\cos x = 0 \vee \cos \frac{3x}{2} = 0 \vee \cos \frac{x}{2} = 0$  de donde se deduce que  
 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

**P11.-** Resolver la ecuación

$$(E) \quad a \cos x + b \operatorname{sen} x = c$$

(i) Para  $ab = 0$  (ii) Para  $ab \neq 0$

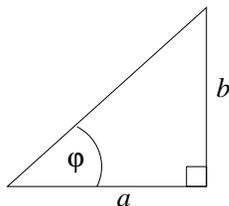
**Solución:** (i) Para  $ab = 0$  entonces  $a = 0 \vee b = 0$ , se obtienen casos que ya sabemos resolver

- $a = 0 \wedge b = 0$  en este caso (E) tiene solución si y sólo si  $c = 0$ .
- $a = 0 \wedge b \neq 0$  en este caso (E) corresponde a resolver  $\operatorname{sen} x = -\frac{c}{b}$ , luego, si  $-\frac{c}{b} \notin [-1, 1]$  (E) no tiene solución, Si  $-\frac{c}{b} \in [-1, 1]$  (E) tiene solución y esta es  $x = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{c}{b}\right) + 2k\pi$  ó  $x = \pi - \operatorname{arcsen}\left(-\frac{c}{b}\right) + 2k\pi$ .
- $a \neq 0 \wedge b = 0$  en este caso (E) corresponde a resolver  $\cos x = -\frac{c}{a}$ , luego, si  $-\frac{c}{a} \notin [-1, 1]$  (E) no tiene solución, Si  $-\frac{c}{a} \in [-1, 1]$  (E) tiene solución y esta es  $x = \pm \operatorname{arcos}\left(-\frac{c}{a}\right) + 2k\pi$ .

(ii) Para  $ab \neq 0$  entonces  $a \neq 0 \vee b \neq 0$ , y por lo tanto  $a^2 + b^2 > 0$ . Si escribimos (E) como

$$(E) \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Podemos definir (ver figura)



$$\varphi = \operatorname{arcos}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \quad \text{pues } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1, 1].$$

y se cumple

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

luego, (E) se escribe

$$(E) \quad \cos \varphi \cos x + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

es decir

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y por lo tanto si  $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \notin [-1, 1]$  se sigue que (E) no tiene solución, en cambio, si  $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1, 1]$

(E) posee solución y se cumple que  $x - \varphi = \pm \operatorname{arcos}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + 2k\pi$ . Resumiendo, si  $ab \neq 0$

$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = c \Rightarrow x = \underbrace{\operatorname{arcos}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)}_{\varphi} \pm \operatorname{arcos}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + 2k\pi.$$

**P12.-** (Propuesto) Resolver  $\sqrt{3} \cos x + \operatorname{sen} x = 1$ .