P2. (20 min.) Considere la elipse de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ encontrar el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0, y_0) como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima. Nota: utilice propiedades de parábolas para determinar el máximo.

Solución: El área de un rectángulo de lados a y b es $a \cdot b$.

En este caso, por simetría, el area corresponde a $4x_0y_0$, con x_0 e y_0 en el primer cuadrante.

Como x_0 e y_0 pertenecen a la elipse entonces $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1$, y por lo tanto

$$(x_0y_0)^2 = \frac{b^2}{a^2}x_0^2(a^2 - x_0^2)$$

llamando $u = x_0^2$ se sigue que

$$(x_0y_0)^2 = \frac{b^2}{a^2}u(a^2 - u),$$

como la parábola $u(a^2 - u)$ alcanza su maximo en el vértice $u = a^2/2$ se sigue que

$$(x_0y_0)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2/2)(a^2 - a^2/2) = \frac{b^2a^2}{4}.$$

Por lo tanto el área máxima corresponde a $4x_0y_0 = 2ab$ y se alcanza en el punto $(x_0, y_0) = (a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$.