



Escuela de Ingeniería. FCFM-U. de Chile.
CÁLCULO MA-12A
Guía de Problemas No. 1, 2003
Números Reales y Geometría Analítica

Índice

1. Problemas.	1
2. Preguntas de controles de años anteriores.	5
3. Autoevaluación: Control #1 año 2002	8
4. Bibliografía recomendada.	13

1. Problemas.

[1] Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta.

- Todo número real posee inverso multiplicativo.
- En un cuerpo puede darse que $1 + 1 = 0$.
- Si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$.
- Para todo real x y todo natural n se cumple que (i) $x^n \cdot x^n = x^{n^2}$ (ii) $x^n \cdot x^{-n} = 0$
- Para todo par de reales x, y es cierto que si $x \leq y$ entonces $x^n \leq y^n$.
- Es cierto que (i) $1 \in]1, 2]$ (ii) $\forall x \in [2, \infty[, \exists M \in \mathbb{R}$ tal que $M > x$ (iii) $\frac{x+y}{2} \in]x, y[$.
- Como $|x + y| \leq |x| + |y|$ para $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $||x + y| + |x - y|| \leq |x + y| + |x - y|$ para $x, y \in \mathbb{R}$.
- Para todo real x , (i) $|x| > 0$ (ii) $|x - y| \leq |x| + |y|$ (iii) $||x| - |y|| \leq |x| - |y|$.
- El conjunto solución de la siguiente inecuación es vacío: $||x + 1| - 1| + 1 > 0$.
- Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee supremo y máximo.
- Todo intervalo abierto posee ínfimo.
- 1 es el ínfimo de (i) $]1, \infty[$ (ii) $]1, \infty[$ (iii) $\{x \in \mathbb{R} \mid (\forall \varepsilon > 0) x + \varepsilon > 1\}$
- -1 es el máximo de (i) $] - \infty, 1[$ (ii) $[-2, -1]$ (iii) $[-3, -1] \cup \{1\}$
- Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado inferiormente entonces $\sup(-A) = -\inf(A)$.
- Para cualquier par de reales x e y existe un racional r y un irracional i tales que $x < r < i < y$.
- Las ecuaciones $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ y $y - y_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_1)$
- La ecuación $x^2 + xy + y^2 = 1$ representa una circunferencia. representan la misma recta.
- El lugar geométrico de los puntos que se encuentran una misma distancia de una recta dada es una recta.
- El foco o vértice de la parábola $y = 4x^2$ es $(\frac{1}{4}, 0)$ y tiene directriz vertical.
- La ecuación $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ representa una elipse con focos $(0, 0)$ y $(-1, 0)$.
- Una recta es tangente a una curva si la interseca en sólo un punto, por lo que la recta $x = 1$ es tangente a la parábola $y = x^2$.

[2] Demuestre que para todo par de reales x e y se cumple:

- (i) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ (ii) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- (i) $x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$

[3] Demuestre las siguientes desigualdades:

- Para todo $x \in \mathbb{R}$, (i) $(1 + x)^2 \geq 1 + 2x$ (ii) $x^2 + y^2 \geq 2xy$ (iii) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$
- Para todo $x \in \mathbb{R}_+$, $x \neq 0$ (i) $x^{-1} > 0$ (ii) $x + x^{-1} \geq 2$ (iii) $x^3 > 0$.
- Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ (i) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (ii) $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$
(iii) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$
- Para todo $x, y, z > 0$, (i) $(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 9$ (ii) Si $x + y = z = 1$ entonces $(\frac{1}{x} - 1)(\frac{1}{y} - 1)(\frac{1}{z} - 1) \geq 8$ (iii) Si $xyz = 1$ entonces $x + y + z \geq 3$.

[4] 1. Demuestre que: (i) $\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ (ii) $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$
2. Calcule (i) $\max(x, y) + \min(x, y)$ (ii) $\max(x, y) - \min(x, y)$ (iii) $\max(x, y) \cdot \min(x, y)$.

[5] Resolver las siguientes inecuaciones:

- (i) $5x - 3 \geq 2x + 1$ (ii) $\frac{2}{6x-5} < 0$ (iii) $(x - 2)(x - 3) \leq 0$.
- (i) $\frac{x+2}{2x^2-3x} < 0$ (ii) $3x^2 - x + 5 < 0$ (iii) $\frac{4}{x} + \frac{x-1}{5} < \frac{3}{x} + 1$.
- (i) $|x - 8| < x - 2$ (ii) $|x^2 - |3 + 2x|| < 4$ (iii) $|\frac{5x+3}{x-1}| \geq 7$.
- Para $a > 0$ (i) $ax - 6 \geq 2ax + 1$ (ii) $\frac{x+a}{x-a} > 0$ (iii) $(x + a)(x - a) < 0$.
- (i) $\frac{(x-a)}{(x+1)(x-a)} > 0$ (ii) $|x - 8| < x + 4$ (iii) $x - |x + 1| > 2$.

[6] Encuentre el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de las siguientes conjuntos:

- (i) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ $\{x \in \mathbb{R} : |x - 4| \geq 2\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} - 2 < 1\}$ (iii) $\{x \in \mathbb{R} : [x] < 2\}$.
- (i) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 < 1\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x \cdot n < 1\}$ (iii) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 3x| < 4\}$.
- (i) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 < 2\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 7\}$ (iii) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
- (i) $\{x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{x} < 2\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R}_+ : x(2x - 1) < |x|\}$ (iii) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq x + 1\}$.
- (i) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x \in [1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.
- (i) $\{x \in \mathbb{R} : [x] - x > 1\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{[x]} < 2\}$ (iii) $\{x \in \mathbb{R} : [x]x < -x\}$
- (i) $\{x \in \mathbb{R} : [x]^2 + x = 1\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{Z} : 2^x > 2\}$ (iii) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

[7] Sean S y T subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$. Probar que S tiene supremo, que T tiene ínfimo y que $\sup(S) \leq \inf(T)$.

[8] 1. Sea A subconjunto de \mathbb{R} , no vacío y acotado superiormente y $c \geq 0$. Pruebe que el conjunto $cA = \{cx : x \in A\}$ es acotado superiormente y que $\sup(A) \cdot c = \sup(cA)$.
2. Sean A y B conjuntos de reales no negativos, no vacíos y acotados superiormente. Probar que AB es acotado superiormente y $\sup(AB) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

Nota: $AB = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$.

[9] 1. Resolver la inecuación $\frac{|x+|x-1||-|x-2|}{(x+2)|x+1|} > 1$.
2. Muestre que $\sup(\sqrt{A}) = \sqrt{\sup(A)}$ donde $A \subset \mathbb{R}_+$ es no vacío y acotado superiormente y $\sqrt{A} = \{\sqrt{x} : x \in A\}$.

- [10] Demuestre que si A y B son acotados superiormente y no vacíos entonces también lo son $A \cup B$ y $A \cap B$.
- [11] Pruebe analíticamente que:
1. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de sus tres vértices.
 2. El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo, es igual en longitud a la mitad del tercer lado.
 3. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados es una recta.
 4. las diagonales de un rectángulo son iguales en longitud.
 5. La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus cuatro lados.
 6. La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo, divide al lado opuesto en la razón que forman los otros dos lados.
 7. Los puntos medios de un rectángulo son los vértices de un paralelogramo.
 8. Las tres alturas de un triángulo se intersectan en un único punto.
- [12] Determine las ecuaciones de las siguientes rectas:
1. que pasa por $(3, 2)$ y $(9, 7)$.
 2. que pasa por $(-1, 0)$ y tiene pendiente -8 .
 3. que pasa por la intersección de las rectas $x = 0$ e $y = -1$ y tiene pendiente 6 .
 4. que pasa por la intersección de las rectas $x - y = 1$ y $x + y = 0$ y el punto $(0, 0)$.
 5. que pasa por la intersección de las rectas $2x + y$ y $x = -2y$ y la intersección de las rectas $3x - 6y = 2$ y $4x + 1 = 0$.
- [13] Dado el punto P de coordenadas (a, b) y la recta L de ecuación $y = mx$, determinar la ecuación de la recta que pasa por P y tal que el trazo que sobre ella determinan los ejes, queda dimidiado por L .
- [14] Un triángulo ABC isósceles ($AC = BC$) y rectángulo en C , varía de tal manera que su vértice A permanece fijo en el origen del sistema de coordenadas y su vértice B se mueve sobre la recta de ecuación $x = a$. Determinar la ecuación del lugar geométrico que recorre el punto C y reconocer la figura que describe.
- [15] Dados el punto $P = (a, b)$ y la recta $L : y = mx$, se trazan PH perpendicular a OX y PK perpendicular a L . Si D es el punto medio de OP y M es el punto medio de HK probar que DM es perpendicular a HK y $DK = DH$.
- [16] Dos rectas variables L_1 y L_2 que pasan, respectivamente por dos puntos fijos A y B se cortan perpendicularmente en el punto P . Determinar el lugar geométrico de P .
- [17] Las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con el eje x son los puntos A y A' . Una tangente cualquiera a la circunferencia por el punto $P = (x_0, y_0)$, $y_0 \neq 0$, de ella corta a las tangentes por A y A' en los puntos Q y R respectivamente. Probar que OQ es perpendicular a OR .
- [18] Sean $L_1 : x + 2y + 4 = 0$, $L_2 : x - y - 1 = 0$, y $L_3 : -x + 3y - 3 = 0$, tres rectas que definen el triángulo ABC . Determinar:
1. Perímetro del triángulo ABC .
 2. Area del triángulo ABC .

3. La ecuación de la circunferencia circunscrita.

- [19] Por el vértice de la parábola $y^2 = 4x$ se trazan dos rectas perpendiculares que cortan en P y Q a la parábola. PQ corta el eje de simetría de la parábola en R . Probar que el foco divide al trazo OR en la razón 1:3.
- [20] Dado un triángulo de base $AB = C$ se pide determinar el lugar geométrico del vértice C en los siguientes casos:
1. Si la altura h_c es igual a la transversal de gravedad t_b .
 2. Si la diferencia de los cuadrados de las transversales de gravedad t_a y t_b es igual a la mitad del área del triángulo.
- [21] Un punto A cuya proyección sobre el eje OY es B se mueve sobre la parábola $y^2 = 4px$. Determinar el lugar geométrico de la intersección de las rectas OA y BF , siendo O el origen y F el foco.
- [22] ¿Cuál es la excentricidad de una elipse en la que la distancia entre sus focos es la mitad de la distancia entre sus directrices?
- [23] Determinar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una elipse paralelas a una dirección dada.
- [24] Demostrar que la suma de las recíprocas de los cuadrados de dos diámetros perpendiculares en una elipse es constante.
- [25] Dada la recta $L : y = kx$ y los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (b, 0)$, se toma un punto cualquiera P sobre L y su simétrico Q con respecto al origen. Las rectas PA y QB se cortan en un punto M . Determinar el lugar geométrico de M cuando el punto P se desplaza sobre L .
- [26] Considere la recta $L : y = mx + n$ y el punto $A = (a, 0)$ donde m, n, a son constantes positivas. Sea Q el punto medio del trazo OA (donde O es el origen) y sean N y M los puntos donde L interseca al eje OY y a la recta vertical por A , respectivamente. Sea L_1 la recta perpendicular al trazo QN que pasa por O y sea L_2 la recta perpendicular al trazo QM que pasa por A . Si P es la intersección de L_1 con L_2 , se pide demostrar que la recta QP es perpendicular con L .
- [27] Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, encontrar el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0, y_0) como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima.
- Nota: utilice propiedades de parábolas para determinar el máximo.
- [28] Desde el punto T se trazan las tangentes TP y TQ a una circunferencia dada. Desde el extremo A del diámetro paralelo a la cuerda de contacto PQ se trazan las rectas AP y AQ que cortan a la recta OT en los puntos R y S . Demostrar que $ST = TR$.
- [29] La recta L tangente a la parábola $y^2 = 4px$ por $P = (x_0, y_0)$ corta al eje OY en B , a la directriz en C y a la recta vertical por el foco en A .
1. Demostrar que $AF = CF$
 2. Demostrar que FB es perpendicular a L .
- [30] Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto que se mueve sobre la circunferencia $C : x^2 + y^2 = r^2$. Sea Q la proyección de P sobre el eje OX y sea C_1 la circunferencia con centro en P y tangente al eje OX . Si la recta L es la recta que pasa por la intersección de C y C_1 , determine el lugar geométrico de los puntos T de intersección entre L y PQ .

- [31] Por un punto $P = (x_0, y_0)$ cualquiera de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ se traza la recta tangente L , la cual corta a las verticales que pasan por $A = (-r, 0)$ y $B = (r, 0)$ en los puntos C y D respectivamente. Determine el lugar geométrico de la intersección $AD \cap BC$.
- [32] Considere un triángulo ABC de vértices $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ y $C = (c, d)$. La altura h_C corta al lado opuesto en D y la altura h_A corta al lado BC en E , siendo $F = h_C \cap h_A$. Sean $G = AC \cap DE$ y M el punto medio del lado AC . Probar que BG es perpendicular a MF .
- [33] Considere al elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Encontrar el lugar geométrico de los puntos P tales que si $T_1(P)$ y $T_2(P)$ son las tangentes a la elipse que pasan por P entonces $T_1(P)$ es perpendicular a $T_2(P)$.
- [34] Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de las secantes que pasan por el foco de una parábola.
- [35] Determinar el lugar geométrico de los puntos P tales que su distancia al eje OY es igual a la mitad de la longitud del trazo tangente desde P a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

2. Preguntas de controles de años anteriores.

- [1] 1. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} , los cuales verifican las siguientes propiedades: (i) $A \cup B = \mathbb{R}$ (ii) todo elemento de A es menor que todo elemento de B . Demuestre que existe un real α que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B . Pruebe, además, que dicho número real α es único.
2. Definamos $A_n = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2 \text{ y } \frac{nx^2-4}{|x|-2} \geq 1\}$. Encuentre $s_n = \sup(A_n)$. Determine $s = \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- [2] 1. Sean $a \in \mathbb{R}_+$, $r \in]0, 1[$ y $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que: $(a+r)^n \leq a^n + r \cdot (1+a)^n$.
2. Sean x, y, z números reales tales que: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Además, sean a, b, c, d, e y f números reales menores o iguales que M (fijo). Demuestre que: $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz \leq 3M$.
- [3] 1. Probar que $\sqrt{5}$ es irracional.
2. Demostrar que para cualquier real $a \neq 0$ se cumple:
 $(a^2 - a^{-1})(a + a^{-1} + 1)^{-1} = a - 1$
3. Sean a y b reales positivos, demostrar que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.
- [4] 1. Resolver la inecuación $x > ||x| + |x - 1| + |x - 2|| + 1$.
2. Sea $S = \{u \in \mathbb{R} : u < u^3\}$ y $T = \{v \in \mathbb{R} : v^6 \leq v^5 + 6v^4\}$. Determinar máximos, mínimos, supremo e ínfimo de S y T cuando existan.
- [5] 1. Sea $a \geq 0$, determinar el área de cada una de la regiones del plano definidas por $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a \text{ y } |y| \leq a\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq a\}$
2. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ las coordenadas de los vértices de un triángulo. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del triángulo y probar que el área de dicho triángulo es igual a $|(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)|$.
- [6] 1. Encuentre los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple $\frac{x(x+2)-|x+2||x-3|}{(x+1)(x-2)} < 0$
2. Determine para que valores de a la siguiente inecuación no tiene solución
 $(x+2)(x-1)(x+2a) < (x+1)(x-2)(x+a)$.

- [7] 1. Dados x e y reales, demuestre que si para cualquier $\varepsilon > 0$ se cumple que $a \leq b + \varepsilon$ entonces $a \leq b$.
2. Sean A, B y C subconjuntos de \mathbb{R} no vacíos y acotados. Pruebe que si para todo $x \in A$ y todo $y \in B$ existe $z \in C$ tal que $x + y \leq z$ entonces $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(C)$.
3. Demuestre que si $C = A + B$ entonces $\sup(A) + \sup(B) = \sup(C)$.
- [8] Sean $x, y \in \mathbb{R}_+$ tales que $x + y = 1$. Demostrar que
- $xy \leq \frac{1}{4}$
 - $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$
 - $(x + x^{-1})^2 + (y + y^{-1})^2 \geq \frac{25}{2}$
- Indicación: Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
- [9] 1. Resuelva la siguiente inecuación: $2x + |x - 5| \leq \frac{25}{x-5}$
2. Probar que $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}_+$.
- [10] Dada la parábola $y^2 = 4px$ cuyo foco es F y un punto P sobre el eje OY . Demostrar que la perpendicular a FP , en P , es tangente a la parábola. Determinar las coordenadas del punto de tangencia. Demostrar que QF es perpendicular a FT , donde Q es el punto de tangencia.
- [11] Probar que toda circunferencia que tiene diámetro una cuerda focal AB de una parábola dada, es tangente a la directriz de dicha parábola.
- [12] La base de un triángulo está fija, siendo sus vértices $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$. El vértice C está sobre la recta $y = c$, $b > 0$ y $c > 0$. Determinar el lugar geométrico correspondiente a la intersección de las tres alturas.
- [13] Considere una circunferencia de radio r . Sea AB un diámetro fijo de ella y PQ una cuerda variable que se mantiene perpendicular a AB . Determine el lugar geométrico del punto de intersección de las rectas que pasan por AB y por BQ respectivamente.
- [14] 1. Demuestre que si dos circunferencias son tangentes en un punto T , este punto es colineal con los centros de ambas circunferencias. Considere sólo el caso en que ambos centros se encuentran en el eje OX .
2. Sean AC y BC arcos de radio AB y centro B y A respectivamente. Dos semicircunferencias de radio $\frac{1}{4}(AB)$ tienen por diámetros AO y OB , siendo O el punto medio de AB . Se desea caracterizar la circunferencia γ , de centro Q , tangente a los cuatro arcos. Siendo T_1 el punto de tangencia entre γ y OB . Pruebe que Q está sobre la recta AT_1 . Siendo T_2 el punto de tangencia entre γ y OB pruebe que Q está sobre la recta MT_2 , donde M es el punto medio de OB . Suponga $A = (-1, 0)$ y $B = (a, 0)$. Encuentre el radio y el centro de la circunferencia γ .
- Indicación: utilice la simetría del problema.
- [15] Se consideran tres puntos O, A, B situados sobre una recta y se contruyen dos semicircunferencias de diámetros OA y OB , respectivamente. Desde el punto medio M del trazo AB se levanta la perpendicular, cortando a la circunferencia mayor en R y luego se traza la tangente MP a la circunferencia menor, siendo P el punto de tangencia. Demuestre que O, P y R se encuentran sobre una misma recta.
- [16] Determinar el lugar geométrico de los puntos P de intersección de las tangentes trazadas por los extremos A y B de dos diámetros conjugados de una elipse.
- Nota: Se llaman diámetros conjugados en una elipse a dos cuerdas que pasan por el centro y cuyas pendientes m_1 y m_2 satisfacen $m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$.

- [17] 1. Demostrar, utilizando los axiomas de cuerpo de los números reales que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ x, y \neq 0 \ (x + y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$$

En cada paso diga cual o cuales axiomas o propiedades está utilizando.

2. Demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ x, y > 0 \ (x + y)(x^{-1} + y^{-1}) \geq 4$$

Indique qué axiomas o propiedades del orden está utilizando.

3. Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|x^2 - 2x + 1|}{|x^2 - 3x + 2|} \leq 1$$

- [18] 1. a) Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ y $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ y } \frac{ax}{a+x} \geq 1\}$. Encontrar, si es que existen, ínfimo, supremo, mínimo y máximo de A .

b) Probar que $\inf\{\frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\} = 0$

2. Dada la parábola de ecuación $y^2 = 4p(x - p)$ para $p > 0$ determine los puntos P y Q (P con coordenadas positivas) de ella, de modo que las tangentes a la parábola por estos puntos pasen por el origen. Calcule la distancia de P a la tangente que pasa por Q .

Indicación: La ecuación de la tangente por un punto $P = (\alpha, \beta)$ a una parábola de ecuación $y^2 = 4p(x - p)$ es $y\beta = 4p(\frac{x+\alpha}{2} - p)$.

- [19] 1. Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La recta $y = \frac{b}{a}x$ intersecta a la elipse en los puntos P y R (P con coordenadas positivas). Determinar el área del rectángulo inscrito en la elipse, que tiene como diagonal el trazo PR y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.

2. Considere la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Una recta variable L que pasa por el origen, intersecta a la circunferencia en los puntos Q y S . Determinar, analíticamente, el lugar geométrico de la intersección de las tangentes a la circunferencia por los puntos P y Q .

Indicación: La ecuación de la tangente por un punto $P = (\alpha, \beta)$ a una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es: $x\alpha + y\beta = r^2$.

- [20] 1. Demuestre utilizando sólo los axiomas de cuerpo de los números reales que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ x, y \neq 0, \ (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}.$$

2. Demuestre usando solamente los axiomas de cuerpo de los números reales y la propiedad anterior que

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \ b, d \neq 0, \ a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = (ac + bd)(bd)^{-1}$$

3. Encontrar todos los valores de a para los cuales el conjunto solución de la inecuación

$$||x| - a| < 1$$

es vacío.

- [21] 1. demostrar que el ínfimo del conjunto $(a, +\infty)$ es a .

2. Pruebe que dos reales x e y para los cuales se cumple que

$$\forall b \in \mathbb{R} \ b > 1 \text{ implica } x < b \cdot y,$$

satisfacen la relación $x \leq y$.

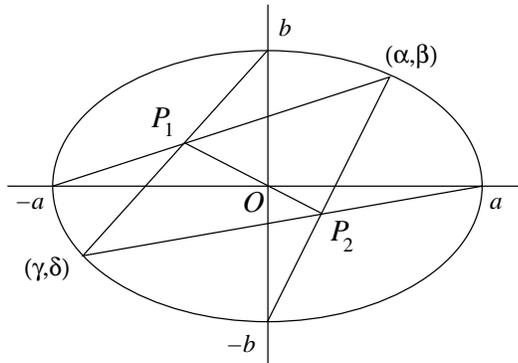
- [22] Para la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y un punto $P = (\alpha, 0)$, con $|\alpha| > r$, se le pide determinar las ecuaciones de las tangentes a C que pasan por P .

3. Autoevaluación: Control #1 año 2002

Le recomendamos que una vez su estudio se encuentre suficientemente avanzado (no estudie a última hora!), resuelva el control del año pasado que a continuación se presenta (3 horas), luego se autoevalúe ud. o con un grupo de estudio (sea exigente!), cotejando con la solución propuesta. Calcule su nota y pregúntese si ella refleja su comprensión y manejo de los contenidos evaluados. Sea autocrítico, pues siempre las primeras evaluaciones son las que parecen más difíciles y es *fundamental* que aprenda rápidamente de sus aciertos y errores. Si su problema es que le falta tiempo, racionalice mejor el tiempo por preguntas (esto lo puede hacer en el momento que se lee el enunciado al comienzo del control) y no se quede estancado en una pregunta. Probablemente *no* está acostumbrado a no resolver un problema! pero eso es habitual en un tema complejo como es el Cálculo. Si su problema es que se equivoca en “tonterías”, tipo signos, omisiones, factores, etc. dése un tiempo al final para revisar lo que hizo, pregúntese si el resultado es razonable y haga ejercicios para dejar fluir el manejo algebraico. Piense que estas “tonterías” han cobrado vidas humanas en ingeniería. Si su problema es que no entiende los enunciados, trate de leer cuidadosamente y subraye las acciones que se piden pensando en los objetivos que se quieren evaluar. Para facilitarle esto último, se han agregado comentarios sobre qué se pretende evaluar en cada pregunta. Debe pensar que el proceso de evaluación es complejo y ud. debe demostrar *en el papel* lo que ha aprendido, esto es, ud. es parte importante para que la medición de sus avances, esfuerzos y aptitudes se haga correctamente. *Atte, el profesor coordinador.*

Comentario Esta primera pregunta apunta a determinar si el alumno ha comprendido los conceptos básicos de geometría analítica relacionados con puntos, rectas e intersecciones (partes (i)-(ii)-(iii)) y un manejo más complejo de expresiones algebraicas en que debe saber reconocer una elipse (parte (iv)).

P1.- En la elipse de semiejes $a > 0$, $b > 0$ centrada en el origen O , el punto (α, β) , con $0 < \alpha < a$, $0 < \beta < b$ es un punto cualquiera de la elipse en el primer cuadrante y el punto (γ, δ) , con $-a < \gamma < 0$, $-b < \delta < 0$ es un punto cualquiera de la elipse en el tercer cuadrante. El objetivo de esta pregunta es demostrar que el segmento que une P_1 con P_2 contiene al origen.



- (i) Si $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, de la figura es claro que $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$. Demuestre que $0 \in \overline{P_1 P_2}$ si $\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = 0$.
- (ii) Determine cuidadosamente las ecuaciones de las cuatro rectas que definen P_1 y P_2 .
- (iii) Suponiendo conocidos α , β , γ , δ , determine las coordenadas de P_1 y de P_2 .
- (iv) Utilizando que (α, β) , (γ, δ) están en la elipse, pruebe que $0 \in \overline{P_1 P_2}$.

Solución (i) La recta que pasa por P_1 y P_2 tiene por ecuación $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ pues $x_1 \neq x_2$. Para que el origen pertenezca a la recta, es necesario que $0 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(0 - x_1)$, esto es, bastaría que $y_1(x_2 - x_1) = x_1(y_2 - y_1)$, esto es $x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$ lo que es equivalente a $\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = 0$ si $x_1 \neq 0$ y $x_2 \neq 0$ [1pto]. Es importante mencionar que el orden lógico es $\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} = 0 \Rightarrow x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0 \Rightarrow y_1(x_2 - x_1) = x_1(y_2 - y_1) \Rightarrow 0 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(0 - x_1) \Rightarrow 0 \in \overline{P_1 P_2}$ [-0.5pto si esto no está nada claro].

- (ii) Si L_1 es la recta que pasa por (α, β) y $(-a, 0)$, L_2 es la recta que pasa por (α, β) y $(0, -b)$, L_3 es la recta que pasa por (γ, δ) y $(a, 0)$, L_4 es la recta que pasa por (γ, δ) y $(0, b)$, entonces

$$\begin{aligned} L_1 : y &= \frac{\beta}{\alpha + a}(x + a) & L_2 : y &= \frac{\beta + b}{\alpha}x - b \\ L_3 : y &= \frac{\delta}{\gamma - a}(x - a) & L_4 : y &= \frac{\delta - b}{\gamma}x + b \end{aligned}$$

[1pto] Nota: un error en estas ecuaciones acarrea errores en toda la pregunta, por eso se dice en el enunciado “determine cuidadosamente”. En el caso de error, el alumno podrá aún resolver consecuentemente (iii) pero no (iv).

- (iii) $P_1 = L_1 \cap L_4$, $P_2 = L_2 \cap L_3$, resolviendo los sistemas se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma \frac{b(\alpha + a) - \beta a}{\gamma\beta - (\alpha + a)(\delta - b)} & y_1 &= \frac{\beta}{\alpha + a}(x_1 + a) \\ x_2 &= \alpha \frac{-b(\gamma - a) + \delta a}{\alpha\delta - (\gamma - a)(\beta + b)} & y_2 &= \frac{\delta}{\gamma - a}(x_2 - a) \end{aligned}$$

[1pto]. Notas: 1.- la simetría del problema se traduce en la simetría de las expresiones si se intercambia a por $-a$, b por $-b$, α por γ y β por δ . El alumno puede usar este argumento para deducir x_2, y_2 a partir de x_1, y_1 o para deducir L_3, L_4 a partir de L_1, L_2 en la parte (ii). 2.- Si el alumno cometió errores en las ecuaciones de las rectas en (ii) y el cálculo de P_1 y P_2 reviste la misma dificultad, dar todo el puntaje si las coordenadas se calcularon bien en función del error. 3.- Note que se expresó y_1, y_2 en función de x_1, x_2 . Esto es una práctica usual para evitar expresiones muy largas y es correcta, siempre que la sustitución sea trivial y no signifique mayores cálculos.

- (iv) Usaremos el resultado de (i). Para ello desarrollamos:

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2} &= \frac{\beta}{\alpha + a} \left(1 + \frac{a}{x_1}\right) - \frac{\delta}{\gamma - a} \left(1 - \frac{a}{x_2}\right) \\ &= \frac{\beta}{\alpha + a} \left(1 + \frac{a}{\gamma} \frac{\gamma\beta - (\alpha + a)(\delta - b)}{b(\alpha + a) - \beta a}\right) - \frac{\delta}{\gamma - a} \left(1 - \frac{a}{\alpha} \frac{\alpha\delta - (\gamma - a)(\beta + b)}{-b(\gamma - a) + \delta a}\right) \\ &= \frac{\beta}{\gamma(\alpha + a)} \frac{\gamma b(\alpha + a) - \gamma\beta a + \gamma\beta a - a(\alpha + a)(\delta - b)}{b(\alpha + a) - \beta a} \\ &\quad - \frac{\delta}{\alpha(\gamma - a)} \frac{-\alpha b(\gamma - a) + \alpha\delta a - \alpha\delta a + a(\gamma - a)(\beta + b)}{-b(\gamma - a) + \delta a} \\ &= \frac{\beta}{\gamma} \frac{\gamma b - a(\delta - b)}{b(\alpha + a) - \beta a} - \frac{\delta}{\alpha} \frac{-\alpha b + a(\beta + b)}{-b(\gamma - a) + \delta a} \\ &= \frac{-\alpha\beta(\gamma b - \delta a + ab)(\gamma b - \delta a - ab) + \gamma\delta(-\alpha b + \beta a + ab)(-\alpha b + \beta a - ab)}{\%} \\ &= \frac{-\alpha\beta(\gamma^2 b^2 + \delta^2 a^2 - 2\delta\gamma ab - a^2 b^2) + \gamma\delta(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2 - 2\alpha\beta ab - a^2 b^2)}{\%} \\ &= \frac{-\alpha\beta(\gamma^2 b^2 + \delta^2 a^2 - a^2 b^2) - \gamma\delta(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2 - a^2 b^2)}{\%} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Antes del último paso [2ptos]. El último paso usa que (α, β) , (γ, δ) están en la elipse [1pto].

Comentario Esta pregunta esta orientada a evaluar la comprensión de los axiomas y propiedades de los números reales además de los esquemas de demostración. Hay que ser especialmente cuidadoso en este tipo de preguntas. En la parte (i) se evalúa directamente el conocimiento de los axiomas, poniendo

hincapié en la no existencia del inverso multiplicativo de 0. En (ii) se evalúa el conocimiento de propiedades elementales de los reales y el uso correcto de la lógica demostrativa. La parte (iii) se enfoca a evaluar el conocimiento y manejo de desigualdades.

- P2.-** (i) Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre que:

$$a \in \mathbb{R}, \quad a \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

(Si usa alguna otra propiedad, deberá demostrarla indicando los axiomas que use.)

- (ii) Usando propiedades elementales de los reales demostradas en clases, demuestre que si $x, y, w, z \in \mathbb{R}$, $w \neq 0$, $z \neq 0$, entonces:

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x = \lambda w, \quad y = \lambda z.$$

- (iii) Usando propiedades elementales de los reales vistas en clases, demuestre que:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a^3 b + ab^3 \leq a^4 + b^4.$$

- Solución** (i) La primera pregunta es delicada ya que no se puede invocar a^{-1} sin antes suponer que $a \neq 0$ [0/0.5pto]. Supongamos $a \neq 0$ entonces, multiplicando la igualdad por a^{-1} se obtiene:

$$\begin{aligned} a \cdot a &= 0 & / \cdot a^{-1} & \text{(Ax. inverso mult.)} \\ (a \cdot a) \cdot a^{-1} &= 0 \cdot a^{-1} & \text{(Def. suma)} \\ a \cdot (a \cdot a^{-1}) &= 0 \cdot a^{-1} & \text{(Ax. asociatividad mult.)} \\ a \cdot 1 &= 0 \cdot a^{-1} & \text{(Ax. inverso mult.)} \\ a &= 0 \cdot a^{-1} & \text{(Ax. neutro mult.)} \\ a &= 0 \end{aligned}$$

lo cual lleva a una contradicción [1pto]. En el último paso usamos $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$, así es que lo demostramos:

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= (x \cdot 0 + 0) + 0 & \text{(Ax. neutro suma)} \\ &= (x \cdot 0 + (x \cdot 0 + -(x \cdot 0))) + 0 & \text{(Ax. opuesto suma)} \\ &= ((x \cdot 0 + x \cdot 0) + -(x \cdot 0)) + 0 & \text{(Ax. asociatividad suma.)} \\ &= (x \cdot (0 + 0) + -(x \cdot 0)) + 0 & \text{(Ax. distributividad)} \\ &= (x \cdot 0 + -(x \cdot 0)) + 0 & \text{(Ax. neutro suma)} \\ &= 0 + 0 & \text{(Ax. opuesto suma)} \\ &= 0 & \text{(Ax. neutro suma)} \end{aligned}$$

[0.5pto]. Otras demostraciones, por ejemplo partiendo de $x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + 0$ y luego cancelando son válidas, siempre que la cancelación se demuestre o se desglose en axiomas. Otra forma de

demostrar sin pasar por esta propiedad es:

$$\begin{aligned}
 a \cdot a &= 0 & / + a \\
 (a \cdot a) + a &= 0 + a & \text{(Def. suma)} \\
 (a \cdot a) + a &= a & \text{(Ax. neutro suma)} \\
 (a \cdot a) + (a \cdot 1) &= a & \text{(Ax. neutro mult.)} \\
 a \cdot (a + 1) &= a & \text{(Ax. distributividad)} \\
 &\Rightarrow & \text{(Unicidad neutro mult.)} \\
 a + 1 &= 1 & / + -1 \\
 (a + 1) + -1 &= 1 + -1 & \text{(Def. suma)} \\
 a + (1 + -1) &= 1 + -1 & \text{(Ax. asociatividad suma)} \\
 a + 0 &= 0 & \text{(Ax. opuesto suma)} \\
 a &= 0 & \text{(Ax. neutro suma)}
 \end{aligned}$$

[1pto] pero en este caso habría que demostrar que el neutro multiplicativo 1 es único, ya que esto es consecuencia de los axiomas [0.5pto].

(ii) Sean $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, desarrollando ambos términos:

$$\begin{aligned}
 (xw + yz)^2 &= (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \\
 x^2w^2 + 2xwyz + y^2z^2 &= x^2w^2 + x^2z^2 + y^2w^2 + y^2z^2 \\
 2xwyz &= x^2z^2 + y^2w^2
 \end{aligned}$$

De donde

$$(xz - yw)^2 = 0 \text{ y eso implica } xz = yw \quad (1)$$

[1pto]. Ahora, si $z \neq 0$ entonces $x = \frac{y}{z}w$, y si $w \neq 0$ entonces $y = \frac{x}{w}z$, entonces basta tomar $\lambda = \frac{y}{z} = \frac{x}{w}$ [1pto].

(iii) Hay por lo menos dos formas de resolver. Una es desarrollar $(a - b)^4$ y otra es factorizar el lado izquierdo por ab . Pero ambas usan la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$ que no es necesario demostrar. Por ejemplo la segunda opción de demostración usa esta propiedad dos veces:

$$\begin{aligned}
 a^3b + ab^3 &= ab(a^2 + b^2) \\
 &\leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 \\
 &= \frac{1}{2}(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) \\
 &= \frac{1}{2}(a^4 + b^4) + a^2b^2 \\
 &\leq \frac{1}{2}(a^4 + b^4) + \frac{1}{2}(a^4 + b^4) \\
 &= (a^4 + b^4)
 \end{aligned}$$

[2ptos].

Comentario Esta pregunta pretende evaluar el conocimiento de técnicas para resolver inecuaciones con módulo (parte (i)) y el manejo del axioma y propiedades del supremo (parte (ii)). Además, en (ii) se requiere el manejo de demostraciones por contradicción o reducción al absurdo.

P3.- (i) Resuelva la inecuación:

$$\frac{|x - 2| + |2x + 11|}{(x - 2)|x + |x - 2||} < \frac{1}{2}.$$

(ii) Sea b un número real y definamos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } (\forall \varepsilon > 0) \ x < b + \varepsilon\}.$$

Pruebe que A es acotado superiormente y que tiene un supremo. Demuestre además que $\sup A = b$. ¿Tiene A un máximo? Justifique claramente todas sus respuestas.

Solución (i) El signo del denominador sugiere separar en dos casos. Las soluciones respectivas son los conjuntos S_1 y S_2 .

Caso 1: $x > 2$ (y por ende $2x + 11 > 0$ y $2x - 2 > 0$), queda

$$\begin{aligned} \frac{x - 2 + 2x + 11}{(x - 2)|x + x - 2|} &< \frac{1}{2} \\ \frac{3x + 9}{(x - 2)(2x - 2)} &< \frac{1}{2} \\ 2(3x + 9) &< (x - 2)(2x - 2) \\ 6x + 18 &< 2x^2 - 2x - 4x + 4 \\ 2x^2 - 12x - 14 &> 0 \\ x^2 - 6x - 7 &> 0 \\ (x + 1)(x - 7) &> 0, \end{aligned}$$

de donde tenemos

$$S_1 = (] - \infty, -1[\cup]7, +\infty[) \cap]2, +\infty[=]7, +\infty[$$

[1pto].

Caso 2: $x < 2$ queda:

$$\begin{aligned} \frac{-x + 2 + |2x + 11|}{(x - 2)|x - x + 2|} &< \frac{1}{2} \\ -x + 2 + |2x + 11| &> x - 2 \\ |2x + 11| &> 2x - 4, \end{aligned}$$

de donde $2x + 11 > 2x - 4$ o $2x + 11 < -2x + 4$ esto es $11 > -4$ o $x < -7/4$, o sea

$$S_2 = \mathbb{R} \cap] - \infty, 2[=] - \infty, 2[$$

[1pto]. Finalmente

$$S = S_1 \cup S_2 =] - \infty, 2[\cup]7, +\infty[$$

[1pto]. Nota: el alumno puede también restar $1/2$ de ambos lados de la desigualdad y sumando llegar a una expresión del tipo $p/q < 0$, lo cual conduce a un análisis similar al presentado aquí.

- (ii)
- o A acotado: en efecto tomando $\varepsilon = 1$, $(\forall x \in A) \ x < b + 1$. En realidad $(\forall x \in A), \ x < b + \varepsilon_0$, para cualquier $\varepsilon_0 > 0$ fijo. Luego $b + \varepsilon_0$ es cota superior de A para cualquier $\varepsilon_0 > 0$ fijo y entonces A es acotado superiormente [0.5pto].
 - o A no vacío: en efecto $b \in A$ pues $(\forall \varepsilon > 0) \ b < b + \varepsilon$ [0.5pto].
 - o A tiene supremo: como A es un suconjunto de \mathbb{R} no vacío y acotado superiormente el axioma del supremo asegura la existencia de $S \in \mathbb{R}$ tal que $S = \sup A$ [0.5pto].
 - o $S \geq b$: en efecto, esto es porque $b \in A$ y S es cota superior de A , luego $b \leq S$ [0.5pto].
 - o $S \leq b$: por contradicción. Si fuera $S > b$ entonces $S - b > 0$ y de la propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $S - b > 1/n$, esto es $S > b + 1/n$. Pero $b + 1/n$ es cota superior de A y sería estrictamente más pequeña que el supremo, lo que lleva a una contradicción [0.5pto].
 - o $\max A$: como $\sup A = b$ pertenece a A , entonces A tiene máximo y $\max A = b$ [0.5pto].

4. Bibliografía recomendada.

- T. Apostol, Cálculo, Vol. I., Reverté, 1965.
- R. Bartle, The elements of Real Analysis, John Wiley e Hijos, New York, 1964.
- H. Cartan, Cálculo Diferencial, Omega, 1972.
- C. Edwards y D. Penney, Cálculo con geometría analítica, Prentice Hall, 4ta. edición, 1996.
- A. Friedman, Advanced Calculus, Holt-Rinehart and Winston, 1971.
- J. Kitchen, Cálculo, McGraw-Hill, 1986.
- S. Lang, Analysis I, Addison-Wesley, 1968.
- M. Spivak, Cálculo Infinitesimal, Reverté, 1970.
- G. Thomas y R. Finney, Cálculo: una variable, Addison-Wesley, 9a. edición, 1998.
- J. Marsden y M. Hoffman, Análisis Clásico Elemental, Addison-Wesley, 2a. edición, 1998.